



Traitement de contact entre corps déformables et calcul parallèle pour la simulation 3D du forgeage multicorps

Josué Aristide Paul Barboza

► To cite this version:

Josué Aristide Paul Barboza. Traitement de contact entre corps déformables et calcul parallèle pour la simulation 3D du forgeage multicorps. Sciences de l'ingénieur [physics]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004. Français. NNT : 2004ENMP1171 . pastel-00001359

HAL Id: pastel-00001359

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001359>

Submitted on 22 Aug 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Collège doctoral

N° attribué par la bibliothèque

____/____/____/____/____/____/____/____/____/____/

THÈSE

présentée par
Josué Aristide Paul Barboza

En vue de l'obtention du titre de
Docteur
de
l'École Nationale Supérieure Des Mines De Paris
Spécialité : Mécanique Numérique

Traitement du contact entre corps déformables et calcul
parallèle pour la simulation 3D du forgeage multicorps

Soutenue publiquement le 20 Février 2004

Devant le jury composé de:

M. P. Laborde	Président
M. J.-C. Boyer	Rapporteur
M. D. Dureisseix	Rapporteur
Mme. C. Béraudo	Examinatrice
M. L. Fourment	Directeur de thèse

À ma mère
Femme noire, femme africaine,
ô toi ma mère je pense à toi...
O Dâman, ô ma mère,
toi qui me portas sur le dos,
toi qui m'allaitas,
toi qui gouvernas mes premiers pas,
toi qui la première m'ouvris les yeux
aux prodiges de la terre, je pense à toi...
Femme des champs, femme des rivières, femme du grand fleuve,
ô toi, ma mère, je pense à toi...
Ô toi Dâman, ô ma mère,
toi qui essuyais mes larmes,
toi qui me réjouissais le cœur,
toi qui, patiemment supportais mes caprices,
comme j'aimerais encore être près de toi,
être enfant près de toi...
Ô Dâman,
Dâman de la grande famille des forgerons,
ma pensée toujours se tourne vers toi,
la tienne à chaque pas m'accompagne,
ô Dâman, ma mère,
comme j'aimerais encore être dans ta chaleur,
être enfant près de toi...
Femme noire, femme africaine,
ô toi, ma mère, merci ;
merci pour tout ce que tu fis pour moi,
ton fils, si loin, si près de toi

extrait de "l'enfant noir" de **Carama Laye**

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier ma mère, mon frère, ma sœur, tante Lucrèce, tonton Xavier et le frère Luc Brunette pour leur soutien et leurs conseils, sans eux je n'aurais jamais pu poursuivre mes études.

J'exprime toute gratitude à Lionel FOURMENT. J'ai eu le privilège de réaliser ce travail sous sa direction. Pendant toutes ces années sa pédagogie, son expérience, ses idées scientifiques et ses qualités humaines ont très largement contribué à un environnement de travail agréable.

Je remercie la Direction de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris de m'avoir donné la possibilité d'effectuer ce travail au Centre de Mise en Forme des Matériaux (CEMEF), au sein du groupe de Calcul Intensif en mise en forme des Matériaux (CIM). J'exprime ma gratitude à Monsieur J.-C. CHENOT, directeur du Cemef et l'ensemble du personnel administratif.

Je remercie vivement Messieurs Jean-Claude BOYER, David DUREISSEIX, Patrick LABORDE et Madame Christine BÉRAUDO d'avoir participé au jury de cette thèse et de l'intérêt qu'ils ont manifesté.

Ce travail a été financé par le projet SIMULFORGE. Je remercie tous les membres du conseil scientifique et les membres du GE5 pour leurs remarques et conseils.

Un grand merci à tous les encadrants et à tous les collègues que j'ai côtoyés au Cemef : Laurent, Sorin, Cyril Gruau, Cyril Chaudemanche, Luisa, Hugues, Nadège, Estelle, Olga, Ramzi, Fred, Hervé, Romain, Julien, Héjin, Tho, Mihaela, Serge, Mehdi, Alban, Olivier, Stéphane, Céline, Benoît, Sylvie, à toute l'équipe de football (Pat., P.O., Pascal, etc ...) et à tous les autres ...

Et *last but not least*, merci MAYA pour ton soutien.

Table des matières

INTRODUCTION.....	1
PREMIERE PARTIE PROBLEME MONO-CORPS.....	5
CHAPITRE I GENERALITES SUR LES EQUATIONS DE LA MECANIQUE DU FORGEAGE.....	7
I.1. INTRODUCTION.....	7
I.2. FORMULATION DU PROBLEME MECANIQUE	7
I.2.1. <i>Dynamique des milieux continus</i>	7
I.2.2. <i>Loi de comportement élastoviscoplastique</i>	11
I.2.3. <i>Écriture déviatorique</i>	13
I.2.4. <i>Les conditions aux limites mécaniques</i>	14
I.2.5. <i>Conditions de contact et de frottement</i>	14
I.3. DISCRETISATION	19
I.3.1. <i>Discrétisation en temps</i>	19
I.3.2. <i>Formulation incrémentale</i>	21
I.3.3. <i>Formulation faible</i>	22
I.3.4. <i>Discrétisation spatiale</i>	23
I.3.5. <i>Équations discrètes et résolution</i>	24
CHAPITRE II TRAITEMENT NUMERIQUE DU CONTACT ENTRE CORPS DEFORMABLE ET CORPS RIGIDE.....	29
II.1. INTRODUCTION	29
II.2. GESTION INCREMENTALE DE LA CONDITION DE CONTACT.....	29
II.3. ALGORITHME DE RECHERCHE D'OBSTACLE	31
II.4. METHODE DE RESOLUTION.....	32
II.4.1. <i>Méthodes des multiplicateurs de Lagrange</i>	33
II.4.2. <i>Méthode de pénalisation</i>	34
DEUXIEME PARTIE PROBLEME MULTI-CORPS	37

CHAPITRE III CONTACT ENTRE CORPS DEFORMABLES.....	39
III.1. INTRODUCTION	39
III.2. FORMULATION DU PROBLEME.....	40
III.3. DISCRETISATION SPATIALE	42
III.4. GENERALISATION DE LA DETECTION DU CONTACT	44
III.5. FORMULATION NODALE DU CONTACT ET DU FROTTEMENT ENTRE CORPS DEFORMABLES	46
<i>III.5.1. Conditions de contact entre corps déformables.....</i>	<i>47</i>
<i>III.5.2. Conditions de frottement entre corps déformable.....</i>	<i>49</i>
III.6. VITESSE DE GLISSEMENT OBJECTIVE.....	50
III.7. FROTTEMENT AUX POINTS DE GAUSS	53
<i>III.7.1. Éléments de frottement.....</i>	<i>54</i>
<i>III.7.2. Vitesse tangentielle aux points d'intégration.....</i>	<i>55</i>
<i>III.7.3. Les formules du gradient et du hessien aux points de Gauss.....</i>	<i>57</i>
III.8. FORMULATION PSEUDO-SYMETRIQUE.....	58
III.9. REPLI DE MATIERE	60
<i>III.9.1. Détection géométrique de l'auto-contact</i>	<i>61</i>
<i>III.9.2. Formulation esclave/esclave.....</i>	<i>62</i>
CHAPITRE IV RESOLUTION PARALLELE	65
IV.1. STRATEGIE DE PARALLELISATION S.P.M.D.....	65
<i>IV.1.1. Le solveur parallèle.....</i>	<i>66</i>
<i>IV.1.2. Méthode de partitionnement de maillage.....</i>	<i>68</i>
<i>IV.1.3. Remaillage parallèle</i>	<i>69</i>
<i>IV.1.4. Définition de quelques mesures de performances.....</i>	<i>71</i>
IV.2. IMPLEMENTATION PARALLELE DE L'ANALYSE DE CONTACT ENTRE CORPS DEFORMABLES	72
<i>IV.2.1. Stratégie générale de l'analyse de contact entre corps déformable.....</i>	<i>72</i>
<i>IV.2.2. Parallélisation de la génération des éléments de contact fictifs.....</i>	<i>73</i>
IV.3. ESTIMATION DES PERFORMANCES	75
CHAPITRE V CAS TESTS DE VALIDATIONS.....	77
V.1. INTRODUCTION	77
V.2. FORGEAGE DE MATERIAUX COMPOSITES.....	77

<i>V.2.1. Colaminage et poinçonnement de tôles plaquées</i>	<i>77</i>
<i>V.2.2. Écrasement d'un cube avec des inclusions</i>	<i>80</i>
V.3. FORGEAGE D'UN TRAIN D'ATERRISSAGE	83
<i>V.3.1. Présentation du cas.....</i>	<i>83</i>
<i>V.3.2. Géométrie et matériau</i>	<i>84</i>
<i>V.3.3. Conditions aux interfaces</i>	<i>85</i>
<i>V.3.4. Résultats.....</i>	<i>85</i>
V.4. SERTISSAGE DE ROULEMENTS DE ROUES PAR BOUTEROLLAGE.....	87
<i>V.4.1. Présentation du cas.....</i>	<i>87</i>
<i>V.4.2. Géométries et matériaux.....</i>	<i>88</i>
<i>V.4.3. Conditions aux interfaces</i>	<i>89</i>
<i>V.4.4. Résultats.....</i>	<i>89</i>
CONCLUSION.....	93
BIBLIOGRAPHIE.....	97

Liste des tableaux

TAB. IV.1 - TEMPS CPU ET EFFICACITE: CAS DU TRIAXE AVEC DES OUTILS DEFORMABLES	75
TAB. IV.2 - TEMPS CPU ET EFFICACITE: CAS DU TRIAXE AVEC DES OUTILS RIGIDES	76
TAB. V.1 – NOMBRE DE NŒUDS ET D'ELEMENTS	81
TAB. V.2 - PARAMETRES DE RHEOLOGIE(CONSISTANCE, SENSIBILITE A LA VITESSE DE DEFORMATION, COEFFICIENT D'ECROUISSAGE ET D'ADOUCCISSEMENT THERMIQUE)	82
TAB. V.3 - DIMENSIONS DES MAILLAGES DU FORGEAGE DU TRAIN	85
TAB. V.4 - PARAMETRES DE LA RHEOLOGIE (CONSISTANCE, SENSIBILITE A LA VITESSE DE DEFORMATION, COEFFICIENT D'ECROUISSAGE ET D'ADOUCCISSEMENT THERMIQUE)	85
TAB. V.5 – PARAMETRES DE LA RHEOLOGIE DU MOYEU	89

Liste des figures

FIG. I.1 - DESCRIPTION DU MOUVEMENT	8
FIG. I.2 - DESCRIPTION GEOMETRIQUE DE L'INTERFACE CORPS DEFORMABLE/CORPS RIGIDE	15
FIG. I.3 -CRITERES DE REMAILLAGE PAR PENETRATION LOCALE ET PAR COURBURE LOCALE (FIGURES EN DEUX DIMENSIONS)	24
FIG. I.4 - ELEMENT FINI MIXTE P^{1+} / P^1	25
FIG. II.1 - APPROXIMATION DE LA SURFACE DU CORPS RIGIDE AVEC UN CONTACT "EXPLICITE"	31
FIG. II.2 – SURFACE POTENTIELLE DE CONTACT POUR L'INCREMENT CONSIDERE	32
FIG. II.3 – PENALISATION DE LA CONDITION DE CONTACT	36
FIG. III.1 – ELEMENTS FICTIFS DE CONTACT	45
FIG. III.2 – SURFACE AFFECTEE AUX NŒUDS FRONTIERES POUR LA PENALISATION.....	47
FIG. III.3 – COMPARAISON DES VITESSES DE GLISSEMENT	53
FIG. III.4 – ELEMENT DE FROTTEMENT.....	55
FIG. III.5 – INTERPOLATION DES VIS A VIS DES POINTS D'INTEGRATION.....	56
FIG. III.6 – ESTIMATION DE LA DIFFERENCE DE PUISSANCE DE FROTTEMENT ENTRE UNE FORMULATION APPROCHEE AUX NŒUDS ET UNE FORMULATION COHERENTE AUX POINTS DE GAUSS	57
FIG. III.7 – FORMULATION PSEUDO-SYMETRIQUE	60
FIG. III.8 – DETECTION DE L'AUTO-CONTACT.....	61
FIG. III.9 – REPLI D'UN CUBE AVEC UNE ENTAILLE	63
FIG. IV.1 – STRATEGIE S.P.M.D DU CODE FORGE3® (CORPS DEFORMABLE ET OUTILS RIGIDES)	66
FIG. IV.2 – CHANGEMENT LOCAL DE COULEURS	69
FIG. IV.3 - REMAILLAGE DE CHAQUE SOUS-DOMAINESUR CHAQUE PROCESSEUR SANS COMMUNICATION.	70
FIG. IV.4 - RECOLLEMENT ET REPARTITIONNEMENT DES DIFFERENTS SOUS-DOMAINES.....	71
FIG. IV.5 - STRATEGIE S.P.M.D. DU CONTACT ENTRE CORPS DEFORMABLES	73
FIG. IV.6 - ELEMENT DE CONTACT AVEC DES NŒUDS SUR PLUSIEURS PROCESSEURS	74
FIG. IV.7 - ACTUALISATIONS DES INTERFACES	75

FIG. IV.8 – PARTITIONNEMENT DU TRIAXE AVEC DEUX OUTILS DEFORMABLES SUR QUATRE PROCESSEURS	75
FIG. V.1 – MAILLAGES DES TOLES ET DES OUTILS RIGIDES DE POINÇONNAGE	78
FIG. V.2 – PROFIL DES TOLES AU COURS DU POINÇONNAGE (AVEC ISOVALEURS DE LA DEFORMATION EQUIVALENTE) A DIFFERENTS INSTANTS DU PROCEDE.	78
FIG. V.3 – COLAMINAGE D'UNE TOLE SANDWICH	79
FIG. V.4 – DEBUT DE CALCUL: INDENTATION ENTRE LES ROULEAUX	79
FIG. V.5 – INCLUSIONS A L'INTERIEUR DE LA MATRICE.....	80
FIG. V.6 – PLANS DE SYMETRIE.....	80
FIG. V.7 – MAILLAGES DES CORPS DEFORMABLES	81
FIG. V.8 - MATERIAU COMPOSITE: ISOVALEURS DE CONTACT SUR LA MATRICE ET SUR LES INCLUSIONS, EN FIN DE FORGEAGE	82
FIG. V.9 - DEFECT AU NIVEAU DE LA TETE DE L'AUBE, EN FIN DE FORGEAGE.....	83
FIG. V.10 - APPARITION DU REPLI (SANS LE MODULE DE TRAITEMENT DU REPLI)	83
FIG. V.11 – ZOOM SUR L'ENCHEVETREMENT DU MAILLAGE	84
FIG. V.12 - MAILLAGES DE LA PIECE ET DES OUTILS RIGIDES	84
FIG. V.13 - FORMATION ET GESTION DU REPLI SUR LA TETE LA PIECE	86
FIG. V.14 - ZONE DE REPLI A LA FIN DE LA SIMULATION	87
FIG. V.15 – PRINCIPE DU BOUTEROLLAGE	88
FIG. V.16 - GEOMETRIES DES CORPS DEFORMABLES ET DES OUTILS RIGIDES	88
FIG. V.17 - FORME DE LA COLLERETTE ET ISOVALEURS DE CONTACT.....	90
FIG. V.18 - CONTRAINTES DANS LA BAGUE ET LA COLERETTE	90
FIG. V.19 – FORCES SUIVANT CHAQUE AXE SUR BOUTEROLLE.....	91

Introduction

Les départements de recherche et développement (R&D) des industries de forgeage font de plus en plus appel aux outils de simulation numérique pour réduire les coûts d'expérimentation, et les délais de mise au point des gammes. La modélisation numérique en mise en forme des matériaux occupe, de nos jours, une place importante dans la réalisation de produits répondant à des critères de haute qualité et à des prix compétitifs dans le marché européen comme international.

Vu les nombreux enjeux (économiques, scientifiques etc..) que représentent la R&D dans la mise en forme des matériaux, plusieurs projets sont mis en œuvre pour modéliser les procédés de confection de pièces complexes. Parmi ces projets, on peut noter l'ACR1, l'ACR2 (des programmes de recherche concerté de simulation du forgeage) et SIMULFORGE qui fait suite à ces deux derniers. Ils ont pour objectifs d'améliorer un logiciel de simulation de l'ensemble du processus de forgeage de pièces métalliques, en tenant compte de l'évolution du matériau au cours du processus.

Ce projet est un cas éloquent de partenariat entre plusieurs acteurs dont les activités tournent autour de la forge. Il est à cheval sur les domaines de la métallurgie et de l'informatique. En effet, SIMULFORGE regroupe en son sein:

quatorze industries de la forge française (SNECMA MOTEURS, AUBERT & DUVAL, SNR, USINOR INDUSTRIEL, SETFORGE, ASCOMETAL, ASCOFORGE, ESTAMFOR, FORMER, HTM FORTECH, PCA, MANOIR INDUSTRIE etc...),

- un éditeur de logiciel (Transvalor),
- le Centre technique des industries de la mécanique (CETIM),
- un syndicat professionnel,
- et sept laboratoires de recherche dont le Cemef.

Le projet SIMULFORGE, faisant partie des 119 technologies clés de 2005¹ (la simulation numérique des procédés), est soutenu par l'État français à travers la Direction générale de l'industrie, des Technologies de l'information et des Postes (DiGITIP).

¹ étude *Technologies clés 2005* publiée par la DiGITIP en octobre 2000 décrit 119 technologies clés pour l'économie française à l'horizon 2005

Le projet SIMULFORGE est divisé en six groupes d'études (GE). Parmi ces six groupes, le but du cinquième (GE5) est d'étendre les domaines d'application du code éléments finis 3D FORGE3[®], modélisant les procédés de mise en forme de pièces complexes. À terme, les études menées par le GE5 devront permettre une utilisation plus facile et plus fiable du logiciel FORGE3[®] afin qu'il délivre, plus rapidement, des résultats plus précis. Pour atteindre ces objectifs, le GE5 a établi plusieurs programmes.

L'un de ces programmes, qui fait l'objet de ma thèse, est axé sur le développement de nouvelles applications (calcul d'une structure composée de plusieurs matériaux) et l'implantation de critères métiers (repli de matière). Ce programme de thèse devra permettre, à terme, d'envisager:

- la possibilité de traiter un grand nombre de corps déformables avec des lois de comportement non linéaires de type élasto-viscoplastique;
- différentes conditions de contact et de frottement entre les différents corps déformables en contact;
- de grandes déformations, notamment aux voisinages des interfaces entre les corps déformables;
- la possibilité d'apparition de replis de matière (contact à l'intérieur d'un même corps déformable) et d'envisager le suivi du repli dans son évolution au cours du forgeage;
- la parallélisation du problème, afin de pouvoir simuler des systèmes complexes avec un grand nombre de corps déformables finement maillés.

La première partie de ce document (les deux premiers chapitres) est consacrée à un rappel de quelques lois de comportements rhéologiques, de contact et de frottement, et de façon générique, à la résolution des problèmes de forgeage d'un corps déformable avec des outils rigides. Nous y présentons les algorithmes et les techniques utilisées dans le logiciel FORGE3[®] pour résoudre les problèmes de forgeage d'un corps déformable avec plusieurs outils rigides.

La deuxième partie (les chapitres III et IV) est dédiée aux problèmes mécaniques de forgeage de systèmes constitués de plusieurs corps déformables et d'outils rigides. Dans cette partie nous présentons l'essentiel de nos travaux sur le couplage mécanique entre corps déformables. Nous y présentons des solutions originales pour la prise en compte des conditions de contact et de frottement. Nous décrivons ensuite la méthode retenue pour étendre au problème multi-corps, la méthode de résolution en parallèle utilisée dans FORGE3[®]. Nous y présentons enfin une manière de résoudre le problème d'auto-contact (repli d'un corps sur lui-même).

Pour clore ce manuscrit, dans le chapitre V, conformément aux objectifs du GE5, nous présentons des cas d'applications de forgeage, industriels et académiques. Au moment de conclure, nous présentons d'autres possibilités d'applications dans le domaine du forgeage.

Première partie
Problème mono-corps

Chapitre I

Généralités sur les équations de la mécanique du forgeage

I.1. Introduction

Nous présentons la modélisation mécanique du forgeage d'une pièce dans le cadre du code FORGE3[®]. Pour ce faire, après avoir succinctement rappelé quelques notions utilisées en mécanique des milieux continus, nous aborderons les équations de conservation et les conditions aux limites mécaniques. La présentation des méthodes de résolutions numérique clôturera ce premier chapitre.

I.2. Formulation du problème mécanique

I.2.1. Dynamique des milieux continus

L'objet de cette partie est d'introduire les outils permettant de modéliser et de caractériser la déformation d'un corps entre deux instants t_0 et t (on suppose que $t_0 < t$). Nous considérons que les grandeurs physiques, que nous utilisons, sont continues et ont des dérivées continues (sauf mentions spéciales).

I.2.1.a. Description du mouvement

Considérons un corps Ξ et un observateur O . Nous désignons par $\Omega_0 \in \mathbb{R}^3$ le domaine qu'occupe Ξ à l'instant t_0 pour l'observateur O , et $\Omega_t \in \mathbb{R}^3$ la position à l'instant t . Nous désignons par C_0 la configuration pour tout point de Ω_0 et par C_t la configuration pour tout point de Ω_t . À une particule P du corps on note par $x_0 \in \Omega_0$ sa position à l'instant t_0 , et

on note $x_t \in \Omega_t$ sa position à l'instant t . En mécanique des milieux continus on définit une transformation (FIG. I.1) qui associe à tout point x_0 de Ω_0 le point x_t de Ω_t . On la note:

$$\Phi : x_0 \in \Omega_0 \rightarrow x_t = \Phi(x_0, t) \in \Omega_t \quad (I.1)$$

Nous supposons que Φ a les propriétés suivantes *presque partout*¹ :

- Φ est bijective,
- Φ est continue sur Ω_0 ,
- Φ est différentiable sur Ω_0 .

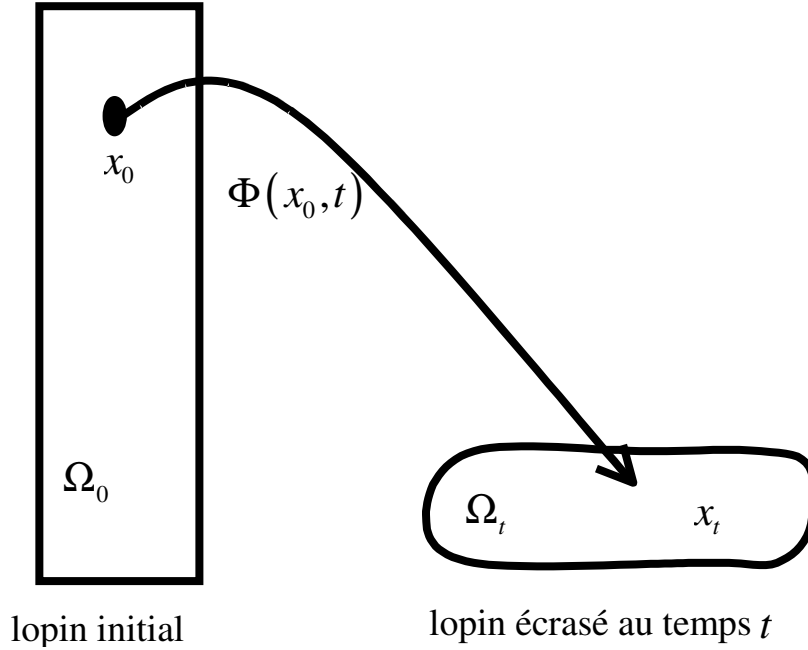


FIG. I.1 - Description du mouvement

La transformation Φ est à l'origine de la description lagrangienne du mouvement dont le but est de pouvoir décrire le mouvement de sa configuration initiale C_0 à la configuration à l'instant t C_t . Ce qui nous permet de suivre l'évolution de la déformation d'une pièce forgée par rapport à sa forme initiale.

On introduit le vecteur des déplacements u défini par :

$$\Phi(x_0, t) = x_t = x_0 + u(x_0, t) \quad (I.2)$$

En grandes déformations, le déplacement u n'est pas considéré comme petit et, contrairement aux petites déformations, on ne peut pas identifier les configurations C_0 et C_t . Ceci peut soulever des difficultés du fait que certaines équations sont posées dans C_0 et d'autres dans C_t . Les grandeurs définies par C_0 sont appelées grandeurs Lagrangiennes et celles définies dans C_t sont appelées grandeurs Eulériennes.

Dans le code de simulation numérique FORGE3[®], on utilise une description appelée lagrangienne réactualisée incrémentale. Son principe est de déterminer la configuration $C_{t+\Delta t}$

¹ au sens de l'intégration de Lebesgue

de chaque point matériel en fin d'incrément de temps $[t, t + \Delta t]$ en considérant C_t comme la configuration de référence (configuration initiale).

I.2.1.b. Définition des grandeurs cinématiques et des contraintes

Ici et dans la suite, nous nous placerons dans le cadre d'une description lagrangienne réactualisée incrémentale du mouvement. Ceci nous permet de considérer, pour un incrément de temps petit que les déformations sont faibles, et donc que les configurations aux instants t et $t + \Delta t$ sont suffisamment proches pour pouvoir appliquer la théorie des petites déformations.

On définit alors le tenseur des déformations par:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla u + {}^T(\nabla u)] \quad \text{avec } \nabla u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (I.3)$$

Dans la suite nous verrons que les relations constitutives incrémentales font intervenir des termes en vitesse, il est donc nécessaire d'introduire le vecteur vitesse d'un point matériel en représentation lagrangienne:

$$v = v(x_0, t) = \frac{du(x_0, t)}{dt} = \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial t} \quad (I.4)$$

On définit aussi le tenseur vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ comme la partie symétrique du gradient des vitesses ∇v :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(v) = \frac{1}{2} [\nabla v + {}^T(\nabla v)]_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.5)$$

Ici et dans la suite, sauf mention spéciale, nous désignerons par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (I.6)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy.

Dans la formulation d'un comportement élastoplastique incompressible ou quasi-incompressible, il est fréquent de décomposer additivement le tenseur des contraintes de Cauchy en une partie sphérique (pression hydrostatique) et une partie déviatorique. La pression hydrostatique est donnée par :

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) = -\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (I.7)$$

Le tenseur des contraintes déviatorique (partie déviatorique) est défini par :

$$s = \sigma + pI \quad (I.8)$$

où I est la matrice identité.

À partir de ce tenseur des contraintes de Cauchy nous définirons, par la suite, les différentes contraintes que peuvent subir un corps.

I.2.1.c. Équations de conservation

Dans cette partie nous présenterons les équations de conservation qui sont basées sur le principe de Lavoisier: "rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme".

Loi de conservation de la masse:

Le principe de conservation de la masse stipule que la masse d'un système matériel reste constante au cours du temps, on le formalise par:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(x, t) dx = 0 \quad \forall D_t \subset \Omega_t \quad (I.9)$$

avec ρ la densité. En appliquant la règle de dérivation sous le signe de l'intégrale, l'équation (I.9) devient:

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) \right] dx = 0 \quad \forall D_t \subset \Omega_t \quad (I.10)$$

Du fait que D_t est quelconque dans $\partial\Omega_t$ et grâce au théorème de Reynolds, on exprime l'équation (I.10) sous sa forme locale (ou équation de continuité) par:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t \quad (I.11)$$

Et de façon équivalente on l'écrit:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t \quad (I.12)$$

En considérant que le matériau est incompressible ($\rho = \text{cte}$) la conservation de la masse revient à satisfaire la condition d'incompressibilité:

$$\text{div}(v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t \quad (I.13)$$

Loi de conservation de la quantité de mouvement:

Dans la mécanique des milieux continus newtonienne, la loi de conservation de la quantité de mouvement s'exprime au moyen du tenseur des contraintes σ (donné par la loi de comportement), des forces volumiques f (la gravité par exemple) et de l'accélération:

$$\text{div}(\sigma) + \rho f = \rho \frac{dv}{dt} \quad \text{dans } \Omega_t \quad (I.14)$$

$$\text{où } \text{div}(\sigma)_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1, 3$$

En forgeage les effets d'inertie et de gravité peuvent être négligés. En effet pour un lopin d'acier de 10cm de hauteur, les forces de gravité ne représentent que 1% des efforts plastiques et il faudrait que localement la vitesse de la matière atteigne 50m/s pour que les forces d'inertie dépassent dans cette zone le dixième des forces de déformation ([Boyère 99]). La loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors:

$$\text{div}(\sigma) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t \quad (I.15)$$

Dans le logiciel FORGE3[®] ces effets sont pris en compte mais nous n'entrons pas dans le détail de leur formulation.

I.2.2. Loi de comportement élastoviscoplastique

En forgeage le matériau n'a pas un comportement linéaire ou élastique mais subit une déformation élastoplastique. Pour modéliser le comportement des matériaux nous utilisons une loi élastoviscoplastique. Elle s'appuie sur une loi élastoplastique à laquelle on rajoute une sensibilité de la contrainte d'écoulement à la vitesse, basée sur une loi de viscoplasticité, par exemple celle de Norton-Hoff. La loi élastoplastique repose sur la loi d'additivité de Prandtl-Reuss avec le critère de plasticité de Von Mises et un écrouissage isotrope. Nous nous plaçons dans le cadre de la plasticité incompressible.

En supposant que les vitesses de déformation élastique sont faibles par rapport aux vitesses de déformation plastique (ce qui est vrai pour les métaux) le tenseur des vitesses de déformation se décompose en une partie élastique réversible et une partie plastique irréversible, on l'écrit de façon additive (décomposition de Prandtl Reuss):

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \quad (I.16)$$

Pour une seule variable d'écrouissage $\bar{\epsilon}$ on définit la fonction du critère de plasticité de Von Mises comme suit :

$$f(\sigma, \bar{\epsilon}) = \left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 + 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{31}^2 \right] \right\}^{1/2} - \sigma_0(\bar{\epsilon}) \quad (I.17)$$

où la fonction $\sigma_0(\bar{\epsilon})$ est monotone croissante, $\bar{\epsilon}$ représente la déformation plastique cumulée.

Elle peut aussi se réécrire en utilisant le tenseur déviatorique par :

$$f(\sigma, \bar{\epsilon}) = \bar{\sigma} - \sigma_0(\bar{\epsilon}) \quad (I.18)$$

La contrainte équivalente de Von Mises est donnée par :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s} \quad (I.19)$$

La loi de Prandtl-Reuss est présentée avec la dérivée temporelle du tenseur de Cauchy σ et utilise la décomposition additive (I.16). Elle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } f(\sigma, \bar{\epsilon}) < 0 \text{ ou si } \left(f(\sigma, \bar{\epsilon}) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} < 0 \right) \text{ alors :} \\ \dot{\sigma} = ID^{el} \dot{\epsilon}^{el} = ID^{el} \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon}^{pl} = 0 \\ \text{si } f(\sigma, \bar{\epsilon}) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \geq 0 \text{ alors :} \\ \dot{\sigma} = ID^{el} \dot{\epsilon}^{el} = ID^{ep} \dot{\epsilon} \end{array} \right. \quad (I.20)$$

ID^{ep} est le tenseur élastoplastique tangent que l'on trouve par exemple dans [Montmittonnet 94], et qui s'exprime :

$$ID^{ep} = \left[ID^{el} - \frac{\left(ID^{el} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \otimes \left({}^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} : ID^{el} \right)}{\frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\epsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : ID^{el} : \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \right] \quad (I.21)$$

La partie élastique $\dot{\epsilon}^{el}$ est reliée à la dérivée temporelle des contraintes par la loi de Hooke pour un matériau isotrope:

$$\dot{\sigma} = ID^{el} \dot{\epsilon}^{el} = \frac{E}{1+\nu} \dot{\epsilon}^{el} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} Tr(\dot{\epsilon}^{el}) I \quad (I.22)$$

Dans l'équation (I.22) ID^{el} est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 définie par:

$$ID^{el}_{ijkl} = 2\mu\delta_{ij}\delta_{kl} + \lambda\delta_{kl}\delta_{ij} \quad (I.23)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé, E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

La partie plastique de $\dot{\epsilon}$ quant à elle, est exprimée sous la forme:

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma}, \dot{\lambda}^{pl} \geq 0 \quad (I.24)$$

où $\dot{\lambda}^{pl}$ est le multiplicateur plastique. La déformation plastique étant incompressible cette équation est complétée par:

$$tr(\dot{\epsilon}^{pl}) = 0 \quad (I.25)$$

Le comportement visqueux du matériau apparaît dans l'expression de $\bar{\sigma}$ et est donnée par :

$$\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = \sigma_s + \left(\sqrt{3} \right)^{m+1} K \left(\dot{\bar{\epsilon}} \right)^m \quad (I.26)$$

$$\sigma_s = K_s \sqrt{3}$$

avec K_s le seuil de plasticité du matériau, K sa consistance, m le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. Ces paramètres dépendent à leur tour de $\bar{\epsilon}$ et d'autres paramètres comme la température dont nous ne parlerons pas ici par soucis de simplicité.

On note l'utilisation de la dérivée particulière du tenseur des contraintes de Cauchy σ , et non une dérivée objective telle que celle de Jaumann par exemple. En effet, nous avons négligé l'effet rotatoire des déformations. Nous renvoyons le lecteur à [Montmittonnet 94] où l'on montre qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser une dérivée objective, les rotations étant faibles en mise en forme, et qu'une réactualisation incrémentale des rotations est parfaitement suffisante.

Nous résumons les équations élastoviscoplastiques sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{vp} \\ \dot{\epsilon}^{el} = ID^{el-1} \dot{\sigma} \\ \dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\sqrt{3}}{2\bar{\sigma}} \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_s}{K\sqrt{3}} \right\rangle^{\frac{1}{m}} s \end{array} \right. \quad (I.27)$$

En adoptant la convention $\langle x \rangle = (1/2)(x + |x|)$, le crochet ($\langle . \rangle$) signifie que dès que la contrainte équivalente de Von Mises $\bar{\sigma}$ atteint le seuil d'écoulement σ_s , la déformation contient une partie viscoplastique.

I.2.3. Écriture déviatorique

Le calcul de $\dot{\epsilon}$ se fait grâce à (I.27). Pour ce faire, du fait de l'incompressibilité de la déformation plastique, et en notant par \dot{e} les parties déviatoriques des tenseurs $\dot{\epsilon}$, on a les relations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon} = \dot{e} + \frac{1}{3} Tr(\dot{\epsilon}) I \\ \dot{\epsilon}^{el} = \dot{e}^{el} + \frac{1}{3} Tr(\dot{\epsilon}^{el}) I \\ \dot{\epsilon}^{vp} = \dot{e}^{vp} \\ \dot{e} = \dot{e}^{el} + \dot{e}^{vp} \\ \sigma = s - pI \end{array} \right. \quad (I.28)$$

Les équations (I.22) et (I.28) donnent, après calcul:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}^{el} = \frac{\dot{s}}{2\mu} \\ \dot{p} = -\frac{1}{3} Tr(\dot{\sigma}) = -\frac{3\lambda + 2\mu}{3} Tr(\dot{\epsilon}) \end{array} \right. \quad (I.29)$$

Et d'après les équations (I.24) et (I.28) le déviateur du tenseur des vitesses de déformation viscoplastique s'exprime alors par :

$$\dot{e}^{vp} = \dot{\epsilon}^{vp} = \dot{\lambda}^{pl} s \quad (I.30)$$

où, d'après (I.24) et (I.27):

$$\dot{\lambda}^{pl} = \frac{\sqrt{3}}{2\bar{\sigma}} \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_s}{K\sqrt{3}} \right\rangle^{\frac{1}{m}} \quad (I.31)$$

En remplaçant dans (I.28) l'expression des parties déviatoriques obtenues dans (I.29) et (I.30), et de plus avec l'équation (I.29) on obtient un système d'équations non linéaires d'inconnues le déviateur des contraintes s et la pression p :

$$\begin{cases} \dot{s} = 2\mu(\dot{e} - \dot{\lambda}^{pl}s) \\ \dot{p} = -\frac{3\lambda + 2\mu}{3}Tr(\dot{e}) \end{cases} \quad (I.32)$$

Les tenseurs des contraintes et les tenseurs des vitesses de déformation étant liés par des équations différentielles leur calcul se fait en utilisant un schéma d'intégration temporelle.

On note que la première équation de (I.32) peut être décomposée comme suit:

- chargement élastique: $\dot{\lambda}^{pl} = 0 \leftrightarrow \bar{\sigma} < \sigma_0$

$$\begin{cases} \dot{e}^{vp} = 0 \\ \dot{e} = \dot{e}^{el} \\ \dot{e}^{el} = \frac{\dot{s}}{2\mu} \end{cases} \quad (I.33)$$

- chargement élastoviscoplastique: $\dot{\lambda}^{pl} \neq 0 \leftrightarrow \bar{\sigma} \geq \sigma_0$

$$\begin{cases} \dot{e} = \dot{e}^{el} + \dot{e}^{vp} \\ \dot{e}^{el} = \frac{\dot{s}}{2\mu} \\ \dot{e}^{vp} = \dot{\lambda}^{pl}s \\ \dot{s} = 2\mu(\dot{e} - \dot{\lambda}^{pl}s) \end{cases} \quad (I.34)$$

I.2.4. Les conditions aux limites mécaniques

En notant par $\partial\Omega$ le bord du domaine Ω , on le décompose en une réunion de quatre parties disjointes, sur lesquelles on impose les conditions aux limites. On pose:

$$\partial\Omega = \Gamma_F \cup \Gamma_T \cup \Gamma_v \cup \Gamma_c \quad (I.35)$$

Avec :

- Γ_F la surface libre où la contrainte σn est nulle ($\sigma n = 0$) . On considère que la pression atmosphérique (P_{ext}) est nulle, ce qui se justifie car $P_{ext} \ll \sigma_0$ où σ_0 ($\sigma_0 \approx 10^8 Pa$) est la contrainte d'écoulement du métal.

- Γ_T la surface à contrainte imposée, $\sigma n = T_0$.

- Γ_v est la partie de $\partial\Omega$ où la vitesse est imposée. Ce cas de figure peut modéliser par exemple un contact bilatéral collant entre un corps rigide (vitesse connue) et un corps déformable.

- Γ_c la surface de contact, on définit des conditions de contact et de frottement.

I.2.5. Conditions de contact et de frottement

Pour les conditions limites de type classique, c'est à dire de type force imposée ou vitesse imposée, leur évolution éventuelle au cours du temps est supposée connue. Par contre, pour les conditions de contact et de frottement, il en va différemment. En effet, leur évolution

au cours du temps fait partie des inconnues du problème. Nous présenterons ici plusieurs lois de contact et de frottement qui sont prises en compte dans le cadre du code FORGE3[®]. Dans ce chapitre l'étude est limitée aux conditions de contact et de frottement entre un outil rigide et un corps déformable.

I.2.5.a. Conditions de contact

En considérant un corps déformable Ω et un outil rigide S , le contact unilatéral entre ces deux corps s'expriment initialement de la façon suivante:

$$\begin{cases} \forall t, \forall x(t) \in \partial S, x(t) \notin \overset{\circ}{\Omega} \\ \forall t, \forall x(t) \in \partial \Omega, x(t) \notin \overset{\circ}{S} \end{cases} \quad (I.36)$$

où $\overset{\circ}{\Omega}$ et $\overset{\circ}{S}$ sont les intérieurs respectifs de Ω et S .

De ces conditions, on peut déduire les conditions unilatérales de Signorini, qui sont une écriture cinématique et énergétique du problème de contact.

Soit $x(t) \in \partial \Omega$ ($x(t)$ est sur la partie de $\partial \Omega$ "potentiellement en contact") la position d'un point du corps déformable et $x_p(t)$ celle de sa projection orthogonale sur la surface extérieure de S , la distance algébrique entre le point $x(t)$ et son projeté est donnée par:

$$g_n = (u_p - u) \cdot n^1 \quad (I.37)$$

où n^1 est le vecteur normal unitaire extérieur à la surface du corps déformable, u_p et u sont respectivement les vecteurs déplacement des points qui occupent les positions $x_p(t)$ et $x(t)$.

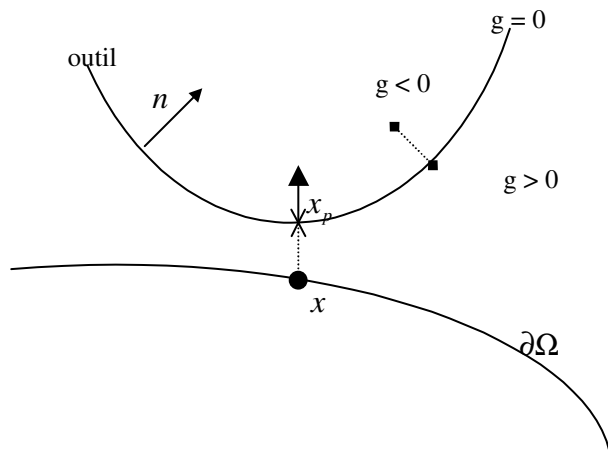


FIG. I.2 - Description géométrique de l'interface corps déformable/corps rigide

En notant par σ^1 et σ^2 les tenseurs de contraintes définis respectivement, sur le corps déformable et sur l'outil rigide, l'application du principe de l'action et de la réaction nous donne:

$$\sigma^1 n^1 = -\sigma^2 n^2 \quad (I.38)$$

avec n^1 et n^2 les normales sortantes respectivement du corps déformable et de l'outil rigide.

On définit la contrainte normale σ_n et la pression de contact p_c par:

$$\sigma_n = (\sigma^1 n^1) \cdot n^1 = (\sigma^2 n^2) \cdot n^2 \quad (I.39)$$

$$p_c = -\sigma_n$$

Les conditions de Signorini peuvent alors être définies partout par:

$$\begin{cases} g_n \geq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ g_n \sigma_n = 0 \end{cases} \quad (I.40)$$

L'équation (I.40) est la condition de non-pénétration entre le corps déformable et l'outil rigide. Elle signifie que s'il y a contact, la contrainte normale est forcément compressive. La dernière équation de (I.40) est celle de complémentarité, c'est à dire s'il n'y a pas de contact la contrainte normale est nulle et si elle est non nulle la distance algébrique est alors nulle, il y a contact.

Ces conditions peuvent être reformulées en une écriture dynamique des conditions de contact (voir [Duvaut 82]). C'est à dire que l'on passe d'une description de type lagrangienne (Γ_c est inconnu) à une description de type Eulérienne (Γ_c est connu). Ils s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} (v - v_{out}) \cdot n &\geq 0 \\ \sigma_n &\leq 0 \\ [(v - v_{out}) \cdot n] \sigma_n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_c = \partial S \cap \partial \Omega \quad (I.41)$$

où v est la vitesse sur le corps déformable et v_{out} la vitesse sur le corps rigide, $n = n^1 = -n^2$.

À cette formulation, on peut aussi ajouter d'autres lois de contact que nous écrivons en vitesse:

Le contact bilatéral collant, qui s'écrit:

$$\left. \begin{aligned} (v - v_{out}) &= 0 \\ \sigma_n &< 0 \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_c \quad (I.42)$$

Ce qui signifie que la vitesse de l'outil est imposée sur la surface de contact du corps déformable.

Le contact bilatéral glissant:

$$(v - v_{out}) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_c \quad (I.43)$$

à cette condition il faut ajouter la loi de frottement qui est fonction de la composante tangentielle de la différence de vitesse sur les deux corps (voir plus loin).

Le contact unilatéral collant:

$$\left. \begin{array}{l} (v - v_{out}) \cdot n \geq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \sigma_n [(v - v_{out}) \cdot n] = 0 \\ \text{si } \sigma_n < 0 \text{ alors } \Delta v_t = (v - v_{out}) - [(v - v_{out}) \cdot n] n = 0 \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_c = \partial\Omega \cap \partial S \quad (I.44)$$

Δv_t est la composante tangentielle de la différence de vitesse sur les deux corps.

Le contact unilatéral glissant est donné par les équations (I.41). À cette loi on rajoute une loi de frottement.

I.2.5.b. Lois de frottement

Dans ce qui précède, nous avons uniquement considéré la composante normale des vecteurs contraintes sur la surface de contact $\sigma^1 n^1$ et $\sigma^2 n^2$, pour définir les conditions de contact. Dans ce qui suit, nous allons présenter des lois de frottement s'appliquant à la composante tangentielle τ (ou scission de frottement) de ces vecteurs contraintes sur la surface de contact:

$$\tau = \sigma^1 n^1 - \sigma_n n^1 = -(\sigma^2 n^2 - \sigma_n n^2) \quad (I.45)$$

Généralement le contact ne se fait pas sans frottement, sauf si on le néglige auquel cas on suppose que la contrainte tangentielle est nulle à l'interface. On utilise des lois avec un seuil de glissement (fixe ou variable). La formulation naturelle des lois de frottement s'écrit souvent en vitesse de glissement, mais dans beaucoup de cas on préfère une écriture en déplacement. Nous présenterons ici trois lois de frottement qui sont utilisées dans la pratique.

De façon générale, pour qu'un glissement apparaisse entre deux corps en contact il faut exercer une force tangentielle minimale. Ceci est traduit par la notion de seuil et est exprimé sous la forme d'une contrainte tangentielle critique τ_F au-delà de laquelle on a un glissement:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } |\tau| < \tau_F \text{ alors } \Delta v_t = 0 \\ \text{si } |\tau| = \tau_F \text{ alors } \exists \lambda \geq 0, \Delta v_t = -\lambda \tau \\ |\tau| > \tau_F \text{ est physiquement impossible} \end{array} \right. \quad (I.46)$$

$$\Delta v_t = (v - v_{out}) - [(v - v_{out}) \cdot n] n$$

Les relations (I.46) expriment le fait que la vitesse de glissement tangentielle Δv_t est non nulle, colinéaire et de sens contraire à la contrainte tangentielle τ lorsque la norme de celle-ci atteint le seuil τ_F . Les relations (I.46) sont appliquées sur la surface de frottement Γ_{frott} :

$$\Gamma_{frott} = \{x \in \partial\Omega, g_n = 0 \text{ et } \sigma_n < 0\} \quad (I.47)$$

I.2.5.b.i. Loi frottement de Coulomb

La loi de frottement de Coulomb s'exprime par un seuil τ_F dépendant de la pression de contact $p_c = -\sigma_n$ et d'un coefficient de frottement μ :

$$\tau_F = \mu p_c, \quad \mu \geq 0 \quad (I.48)$$

Ce qui donne:

$$|\tau| \leq \mu p_c, \quad (\mu \geq 0) \quad (I.49)$$

si $|\tau| < \mu p_c$ alors $\Delta v_t = 0$

$$\text{si } |\tau| = \mu p_c \text{ alors } \Delta v_t = -\frac{\tau}{\mu p_c} \|\Delta v_t\|$$

$$|\tau| > \mu p_c \text{ physiquement impossible}$$

où μ est le coefficient de frottement que nous prendrons constant dans nos applications numériques. Dans la suite nous négligerons le seuil de frottement, pratiquement toujours dépassé en mise en forme (sauf dans les écoulements de filage) et nous écrirons les relations (I.49) comme suit:

$$\text{sur } \Gamma_{frott} : \tau = \mu p_c \frac{\Delta v_t}{\|\Delta v_t\|} \quad (I.50)$$

I.2.5.b.ii. Loi de Tresca

La loi de Tresca dérive des lois de comportement plastique incompressible (lois de Von Mises, de Tresca ...). Son seuil de glissement τ_F est donné par la relation:

$$\tau_F = \bar{m} \tau_{\max} \text{ avec } 0 \leq \bar{m} \leq 1 \quad (I.51)$$

avec \bar{m} le coefficient de frottement, τ_{\max} est la contrainte d'écoulement en cisaillement du matériau. Pour un critère de Tresca elle est exprimée par:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_0}{2} \quad (I.52)$$

et pour un critère de Von Mises par:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (I.53)$$

où σ_0 est la contrainte d'écoulement du métal (cf. (I.18)).

Ce qui donne:

$$\text{si } |\tau| < \bar{m} \tau_{\max} \text{ alors } \Delta v_t = 0 \quad (I.54)$$

$$\text{si } |\tau| = \bar{m} \tau_{\max} \text{ alors } \Delta v_t = -\frac{\tau}{\bar{m} \tau_{\max}} \|\Delta v_t\|$$

$$|\tau| > \bar{m} \tau_{\max} \text{ physiquement impossible}$$

En mise en forme des matériaux, comme pour le frottement de Coulomb, la notion de seuil de frottement est négligée et on a:

$$\text{sur } \Gamma_{\text{frott}}, \tau = -\bar{m} \frac{\sigma_0 \Delta v_t}{\sqrt{3} \|\Delta v_t\|} \quad (I.55)$$

I.2.5.b.iii. Loi de type viscoplastique

La loi de frottement viscoplastique (ou loi de frottement de Norton), contrairement aux lois de Coulomb ou de Tresca, sera présentée sans seuil. Elle dérive du comportement visqueux et s'exprime directement par:

$$\text{sur } \Gamma_{\text{frott}}, \tau = -\alpha_f K \|\Delta v_t\|^{p_f-1} \Delta v_t \quad (I.56)$$

avec α_f et p_f qui sont respectivement le coefficient de frottement et le coefficient de sensibilité à la vitesse de glissement, K la consistance du matériau.

On remarque que si p_f tend vers 0, la loi de frottement viscoplastique tend vers une loi de type Tresca ($\bar{m} = \alpha_f$) sans seuil de glissement.

I.3. Discrétisation

I.3.1. Discrétisation en temps

Du fait que les efforts d'inertie ont été négligés, pour chaque point matériel il s'agit de résoudre de façon générique l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(t, x(t)) & \forall x = x(t) \in \Omega^t \\ x(0) = x^0 \in \Omega^0 \text{ donné} \end{cases} \quad (I.57)$$

En utilisant le formalisme Lagrangien réactualisé, pour un pas de temps Δt donné, en supposant la position $x(t)$ connue, on a:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} v(\zeta, x(\zeta)) d\zeta \quad (I.58)$$

En discrétisant l'équation (I.58) avec une θ -méthode, on obtient:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (1 - \theta) v(t, x(t)) \Delta t + \theta v(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) \Delta t, 0 \leq \theta \leq 1 \quad (I.59)$$

Le problème du choix de θ se pose. En effet, des valeurs de θ inférieures à 1/2 engendrent des schémas qui ne sont pas inconditionnellement stables et qui nécessitent le calcul d'un pas de temps approprié.

Pour $\theta = 0$, on a un schéma explicite. Avec ce schéma on considère que la vitesse $v(t)$ reste constante pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$. En supposant connaître $x(t)$ (et donc Ω_t), on calcule le champ de vitesse $v(t)$ pour calculer directement la configuration à l'instant $t + \Delta t$, l'équation (I.58) donne:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t, x(t)) \Delta t \quad (I.60)$$

L'erreur commise en effectuant cette approximation est proportionnelle à Δt^2 .

Dans le logiciel de simulation FORGE3[®], on utilise un schéma d'Euler implicite ($\theta = 1$) pour résoudre l'équation (I.57) (loi de comportement écrite sur $\Omega_{t+\Delta t}$). On suppose que les positions $x(t)$ sont connues (c'est à dire Ω_t) et on calcule sur $\Omega_{t+\Delta t}$ la vitesse $v(t + \Delta t)$ (à l'instant $t + \Delta t$), et le schéma d'actualisation est :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t + \Delta t, x(t + \Delta t))\Delta t \quad (I.61)$$

On constate que pour ce schéma implicite il y a une non-linéarité géométrique due au fait que les calculs sont effectués sur la configuration $\Omega_{t+\Delta t}$ dépendant elle-même d'une inconnue : le champ de vitesse à l'instant $t + \Delta t$. Mais dans FORGE3[®] on approxime $\Omega_{t+\Delta t}$ par Ω_t dans les intégrales de volume pour éviter les non linéarités géométriques sources de difficultés de convergence et qui ne modifient pas vraiment la solution trouvée. Et donc si la loi de comportement est "instantanée", sans histoire, les deux schémas sont identiques. Dans ce schéma on considère, de la même façon que pour le schéma explicite, que la vitesse $v(t + \Delta t)$ reste constante pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$.

Un autre schéma d'intégration temporelle d'ordre 2 est utilisé dans FORGE3[®] pour résoudre (I.57). C'est une méthode de type Runge-Kutta. Elle est souvent appelée "méthode de la tangente améliorée" ou "RK2" (voir [Boyère 99]). Cette méthode nécessite le calcul d'une configuration intermédiaire à "mi-pas de temps" entre la configuration à l'instant t et celle à l'instant $t + \Delta t$. L'équation (I.58) est évaluée comme suit:

On calcule d'abord une configuration intermédiaire à l'instant $t + \Delta t / 2$ par un schéma d'Euler explicite exprimé comme suit:

$$x\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = x(t) + v(t, x(t))\frac{\Delta t}{2} \quad (I.62)$$

Une fois que cette actualisation est effectuée, la vitesse $v(t + \Delta t / 2, x(t + \Delta t / 2))$ est calculée sur cette configuration intermédiaire et on obtient la nouvelle configuration à l'instant $t + \Delta t$ par:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right)\Delta t \quad (I.63)$$

Avec ce schéma l'erreur commise est proportionnelle à Δt^3 . Ce schéma permet d'obtenir une meilleure précision sur la réactualisation entre chaque incrément. Pour obtenir une précision donnée, on peut employer des pas de temps plus grands qu'avec la méthode d'Euler. Dans [Boyère 99], des tests effectués avec le logiciel FORGE3[®] montrent le gain de temps qu'apporte cette méthode. Dans la pratique son principal intérêt est de réduire les variations numériques du volume tout particulièrement lorsque le domaine subit de grands déplacements. Cette méthode est plus complexe que le schéma d'Euler car elle nécessite deux calculs du champ de vitesse, l'un à l'instant t et l'autre à l'instant $t + \Delta t / 2$.

I.3.2. Formulation incrémentale

Le système d'équations (I.32) relie la dérivée temporelle \dot{s} (partie déviatorique de la dérivée temporelle du tenseur des contraintes σ) à la vitesse de déformation totale $\dot{\epsilon}$ (ou \dot{e}) par des équations différentielles du premier ordre, non linéaires et à coefficients non constants. Ainsi le champ des contraintes ne peut être connu à l'instant t que s'il est connu à l'instant ς ($\varsigma < t$). La résolution du système se fait par le choix d'un schéma d'intégration temporelle et on intègre ce système dans un intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$. Par la suite, l'instant t_n désignera la $n^{\text{ième}}$ étape de calcul ou le $n^{\text{ième}}$ incrément. Pour des raisons de coût de calcul, on utilisera une θ -méthode. De plus cette méthode satisfait la condition de consistance incrémentale: un point initialement sur la surface du critère de plasticité reste sur la surface.

La résolution du problème consiste à calculer $s_{n+1}, p_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}$ et $\dot{\lambda}_{n+1}$, en connaissant $s_n, p_n, \bar{\epsilon}_n$ et $\dot{e}_{n+1}(v_{n+1})$ est donné par le schéma d'intégration. Sous ces hypothèses, le système (I.32) est écrit comme suit:

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n + \Delta t_n \{ (1-\theta) \dot{s}_n + \theta \dot{s}_{n+1} \} \\ e_{n+1} = e_n + \Delta t_n \{ (1-\theta) \dot{e}_n + \theta \dot{e}_{n+1} \} \\ p_{n+1} = p_n + \Delta t_n \{ (1-\theta) \dot{p}_n + \theta \dot{p}_{n+1} \} \\ f(\sigma_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}) = 0 \\ \bar{\epsilon}_{n+1} = \bar{\epsilon}_n + \Delta t_n \{ (1-\theta) \dot{\bar{\epsilon}}_n + \theta \dot{\bar{\epsilon}}_{n+1} \} \end{cases} \quad (I.64)$$

$$0 < \theta \leq 1, \Delta t_n = t_{n+1} - t_n$$

D'après (I.29) \dot{p}_{n+1} est linéaire en v_{n+1} d'où p_{n+1} est directement déduit de p_n et v_{n+1} en utilisant la troisième équation du système (I.64).

Comme dans le cas de l'actualisation de la configuration, la question du choix de θ se pose. Nous prendrons la valeur de θ égale à 1 pour éviter des calculs supplémentaires dans la construction du module tangent. Pour $\theta = 1$ (schéma implicite) dans (I.64), on a un cas particulier de la méthode du point milieu généralisé et correspond à une résolution de (I.64) par un algorithme de prédiction élastique et retour radial [Gay 95], [Rappaz 98]. Après simplification l'équation (I.64) devient (sans le terme en pression) :

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{2\mu\Delta t_n \dot{e}_{n+1} + s_n}{1 + 2\mu\Delta t_n \dot{\lambda}_{n+1}^{pl}} \\ s_{n+1} : s_{n+1} - \frac{2}{3} \sigma_0^2(\bar{\epsilon}_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (I.65)$$

Pour résoudre le système (I.65), avec pour inconnues s_{n+1} et $\dot{\lambda}_{n+1}^{pl}$, on introduit la première équation dans la seconde pour aboutir à une équation scalaire en $\dot{\lambda}_{n+1}^{pl}$:

$$\begin{aligned} G(\dot{\lambda}_{n+1}^{pl}) &= 2\mu\Delta t_n \dot{\lambda}_{n+1}^{pl} \sigma_0(\bar{\epsilon}_{n+1}) + \sigma_0(\bar{\epsilon}_{n+1}) \\ &\quad - \sqrt{\frac{3}{2} (2\mu\Delta t_n \dot{e}_{n+1} + s_n) : (2\mu\Delta t_n \dot{e}_{n+1} + s_n)} = 0 \end{aligned} \quad (I.66)$$

Dans la première équation de (I.65), $\dot{\lambda}_{n+1}^{pl} = 0$ implique que:

$$s_{n+1} = s_{n+1}^{pr} = 2\mu\Delta t_n \dot{\epsilon}_{n+1} + s_n \quad (I.67)$$

Ce qui n'est rien d'autre qu'une estimation élastique de la solution s_{n+1} de l'équation (I.65). En effet si $\dot{\lambda}_{n+1}^{pl} = 0$ alors $\dot{\epsilon}_{n+1}^{vp} = 0$ et $\dot{\epsilon}_{n+1}^{el} = \dot{\epsilon}_{n+1}$ d'après (I.30). On pose:

$$B_0 = \sqrt{\frac{3}{2} s_{n+1}^{pr} : s_{n+1}^{pr}} \quad (I.68)$$

En utilisant le fait que la fonction $\sigma_0(\bar{\epsilon})$ est monotone croissante et que $\dot{\lambda}^{pl} \geq 0$ la déformation est purement élastique ($\dot{\lambda}_{n+1}^{pl} = 0$) si $\sigma_0(\bar{\epsilon}_n) > B_0$ (ce qui implique $\sigma_0(\bar{\epsilon}_{n+1}) > B_0$) et elle est élastoviscoplastique si $\sigma_0(\bar{\epsilon}_n) < B_0$.

En introduisant l'expression de σ_0 donnée par (I.26) dans l'expression de $\dot{\lambda}^{pl}$, en pratique on a une dépendance de $\bar{\epsilon}_{n+1}$ par rapport à $\dot{\lambda}_{n+1}^{pl}$ par l'équation:

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{2}{3} \dot{\lambda}^{pl} \sigma_0(\bar{\epsilon}) \quad (I.69)$$

En introduisant cette dernière relation dans (I.66) on a:

$$3\mu\Delta t \dot{\bar{\epsilon}}_{n+1} + \sigma_0(\bar{\epsilon}_{n+1}) - B_0 = 0 \quad (I.70)$$

$$\text{où } \bar{\epsilon}_{n+1} = \bar{\epsilon}_n + \Delta t_n \dot{\bar{\epsilon}}_{n+1}$$

En résolvant l'équation (I.70) on obtient la valeur de $\dot{\bar{\epsilon}}_{n+1}$ à partir de laquelle on déduit celle de $\dot{\lambda}_{n+1}^{pl}$ en utilisant (I.69) et la valeur s_{n+1} est calculée à partir de la première équation du système (I.65).

I.3.3. Formulation faible

Le problème mécanique à résoudre s'écrit sous la forme mixte vitesse/pression :

trouver $(v(t), p(t))$ vérifiant l'équation d'équilibre :

$$\text{div } s(v(t)) - \nabla p(t) = 0 \quad (I.71)$$

où σ est décomposé selon (I.28), s et p vérifient (I.32), s et la vitesse de déformation sont liées par une loi de comportement.

De plus $(v(t), p(t))$ vérifient aussi l'équation d'incompressibilité de la partie viscoplastique des déformations et donc:

$$\begin{aligned} &\text{-si on a un comportement parfaitement plastique ou parfaitement} \\ &\text{incompressible : } \text{div } v = 0 \end{aligned} \quad (I.72)$$

$$\begin{aligned} &\text{-si une des composantes est élastique alors : } \text{div } v = -\frac{3\dot{p}}{2\mu + 3\lambda} \end{aligned} \quad (I.73)$$

On considère que la condition de contact sur l'interface Γ_c est bilatéral collant (dans le chapitre suivant nous présentons la prise en compte du frottement et du caractère unilatéral).

À partir de (I.71) et (I.73), en utilisant des fonctions tests appropriées ou en appliquant directement le principe des puissances virtuelles, on obtient la formulation faible (ou formulation variationnelle) du problème:

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (v, p) \in \mathcal{V}^0 \times P \text{ tels que :} \\ & \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} s(v) : \dot{\epsilon}(v^*) dV - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v^* dV - \int_{\Gamma_T} T_0 \cdot v^* dS = 0 \\ & \int_{\Omega} p^* \left(\operatorname{tr} \dot{\epsilon}(v) + \frac{3\dot{p}}{2\mu + 3\lambda} \right) dV = 0 \\ & \forall (v^*, p^*) \in \mathcal{V} \times P \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (I.74)$$

où $s(v)$ vérifie la première équation de (I.32), $P = L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω au sens de Lebesgue, les espaces \mathcal{V}^0 et \mathcal{V} sont donnés par:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left\{ v, v \in (H^1(\Omega))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_v \right\} \\ \mathcal{V}^0 &= \left\{ v, v \in \mathcal{V}, v = v_{out} \text{ sur } \Gamma_c \right\} \end{aligned} \quad (I.75)$$

$H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des distributions de carré sommable ainsi que leur dérivée première.

I.3.4. Discrétisation spatiale

Pour résoudre le problème mécanique, il est nécessaire de discrétiser le domaine $\Omega(t)$ et nous utiliserons la méthode des éléments finis. Cette discrétisation consiste à construire une triangulation (ou maillage) \mathfrak{K}_h de $\bar{\Omega}(t)$ par un ensemble fini de tétraèdres :

$$\bar{\Omega}(t) = \bigcup_{\Omega_e \in \mathfrak{K}_h} \Omega_e \quad (I.76)$$

Le choix d'élément tétraédriques par rapport à d'autres types d'éléments, hexaédriques par exemple, est motivé par le fait que le maillage automatique en tétraèdres est beaucoup plus aisé. En effet, la simulation numérique des procédés de forgeage demande des remaillages fréquents de la géométrie du corps lié aux grandes déformations qu'elle subit. Cette procédure de remaillage adaptatif et automatique évite que des éléments de \mathfrak{K}_h ne dégénèrent (volume de l'élément nul ou négatif).

Le mailleur de FORGE3[®] construit des éléments tétraédriques linéaires à quatre nœuds et se décompose en deux parties : un mailleur surfacique et un mailleur volumique :

Un mailleur surfacique qui améliore une surface donnée sans modifier sa géométrie en respectant un critère géométrique : le critère de courbure locale qui est défini en un nœud du maillage par :

$$\Pi(noe) = 360^\circ - \sum_{T \in F(noe)} \alpha(noe, T) \quad (I.77)$$

Avec noe un nœud du maillage, $F(noe)$ l'ensemble des triangles attenants au nœud noe , $\alpha(noe, T)$ la mesure en degrés de l'angle au sommet noe du triangle T . Les opérations topologiques en surface sont : l'inversion de diagonale, la création d'un nœud frontière au milieu d'une arête commune à deux triangles et la destruction d'un nœud frontière.

Un mailleur volumique qui n'influe pas sur la surface car il travaille avec une frontière imposée. Pour que le maillage recouvre exactement la géométrie du corps, la somme du volume des éléments doit être égale au volume calculé à partir de la frontière du domaine. Le mailleur améliore ensuite la qualité des tétraèdres par des opérations topologiques locales en suivant des critères de qualité.

Dans FORGE3[®], le mailleur peut être déclenché suivant plusieurs critères: la pénétration excessive de la frontière dans l'outillage, la courbure locale excessive de la frontière du maillage, un critère de période (la période s'exprimant en nombre d'incréments ou temps) ou une estimation de l'erreur due à la discrétisation spatiale (FIG. I.3).

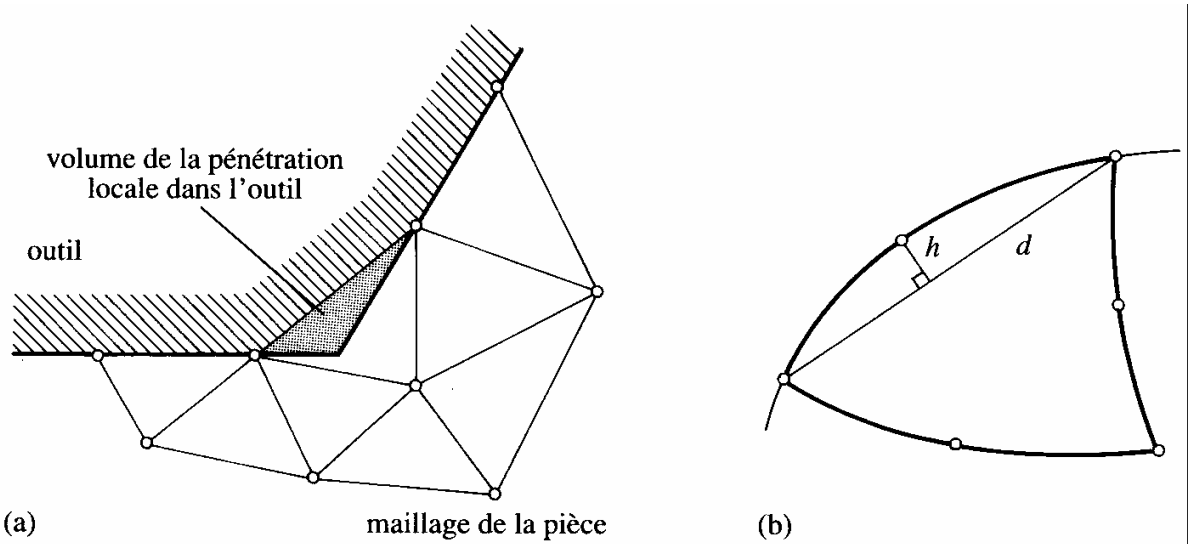


FIG. I.3 -critères de remaillage par pénétration locale et par courbure locale (figures en deux dimensions)

Une fois que le remaillage est réalisé, il est nécessaire d'effectuer le transport, de l'ancien vers le nouveau maillage, des variables de différents types: champs scalaires (par exemple la déformation plastique équivalente, la pression), champs vectoriels (vitesse) ou champs tensoriels (contraintes) (voir [Rappaz 98]).

I.3.5. Équations discrètes et résolution

I.3.5.a. Formulation discrète par la méthode des éléments finis

Avec la triangulation \mathfrak{T}_h de $\bar{\Omega}(t)$ on peut alors approcher les espaces fonctionnels \mathcal{V}^0 , \mathcal{V} et P par des sous espaces de dimension finie conformes $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{V}_h^0 \subset \mathcal{V}^0$ et $P_h \subset P$.

Pour minimiser les temps de calcul sans pour autant détériorer la qualité des résultats obtenus, une interpolation P^1 (linéaire) semble être un bon compromis. On utilise un élément mixte P^{1+} / P^1 (illustré sur la figure FIG. I.4).

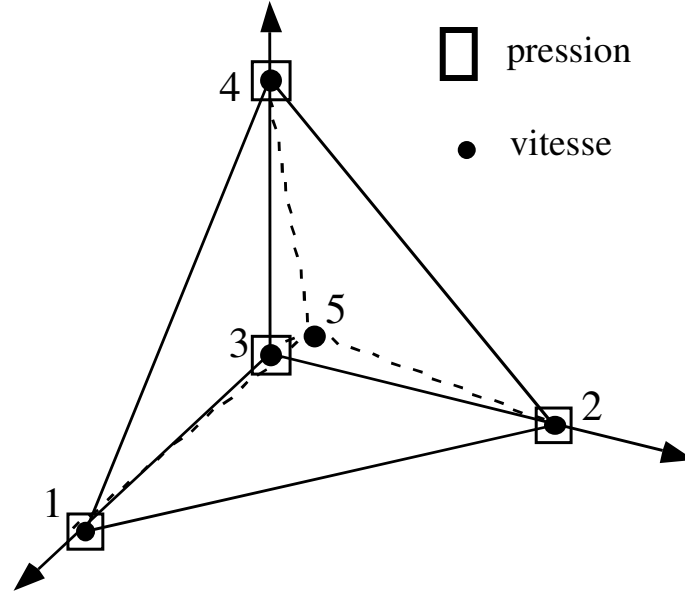


FIG. I.4 - élément fini mixte P^{1+} / P^1

C'est un élément tétraédrique quasi-linéaire. La vitesse et la pression sont interpolées linéairement en fonction des valeurs de chacun des sommets du tétraèdre. L'exposant $+$ signifie le rajout d'un degré de liberté supplémentaire pour l'interpolation de la vitesse, au centre de l'élément. Ce degré de liberté est ajouté pour satisfaire la condition de compatibilité (relation de Brezzi-Babuska) entre l'interpolation de la pression p et celle de la vitesse v (voir [Coupez 95], [Brezzi *et al.* 91]). Ce type d'élément est bien adapté aux écoulements élasto-plastique (voir [Aliaga *et al.* 98]).

La fonction d'interpolation des degrés de liberté additionnels en vitesse au centre vaut: 1 au centre de l'élément et 0 sur sa frontière (élément bulle). Le champs de vitesse v_h interpolé sur l'élément P^{1+} / P^1 se décompose ainsi de manière unique par:

$$v_h = v_h^l + b_h, v_h \in \mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^l \oplus B_h \quad (I.78)$$

avec v_h^l la partie linéaire du champ de vitesse et b_h la partie bulle.

$$\mathcal{V}_h^l = \left\{ v_h^l, v_h^l \in \left(C^0(\Omega_h) \right)^3, v_h^l|_{\Gamma_v} = 0 \text{ et } v_h^l|_{\Omega^e} \in \left(P^1(\Omega^e) \right)^3, \forall \Omega^e \in \mathfrak{T}_h \right\} \quad (I.79)$$

où:

$C^0((\Omega_h))^3$ est l'espace des fonctions continues sur le domaine $\Omega_h \subset \mathbb{R}^3$.

$(P^1(\Omega^e))^3$ est l'espace des fonctions linéaires sur l'élément $\Omega^e \subset \mathbb{R}^3$.

Dans [Coupez 95] l'espace B_h est introduit avec une fonction bulle linéaire par morceaux sur Ω_e , de manière à éviter les difficultés liées à l'intégration des polynômes de degré 4 et pour réduire la différence de degrés entre les interpolations. B_h est donc défini par:

$$B_h = \left\{ b_h, b_h \in \left(C^0(\Omega_h) \right)^3, \forall \Omega^e \in \mathfrak{T}_h, b_{h/\partial\Omega_i^e} = 0, b_{h/\Omega_i^e} \in \left(P^1(\Omega_i^e) \right)^3, i=1, \dots, 4 \right\} \quad (I.80)$$

où les $\Omega_i^e, i=1, \dots, 4$ sont les sous-tétraèdres du tétraèdre Ω^e dont le centre est un sommet commun aux sous-tétraèdres. Les éléments de B_h sont donc continus sur l'élément Ω^e mais pas dérivables.

Le champ de pression est linéaire et continu:

$$P_h = \left\{ p_h, p_h \in C^0(\Omega_h) \text{ et } p_{h/\Omega^e} \in P^1(\Omega^e), \forall \Omega^e \in \mathfrak{T}_h \right\} \quad (I.81)$$

En utilisant les fonctions de formes linéaires et bulles, en chaque point $x_h \in \Omega_h$, on a :

$$\begin{aligned} v_h(x_h) &= \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(\xi) V_k + \sum_{j=1}^{Nbelt} N_j^b(\xi) B_j \\ x_h &= \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(\xi) X_k \\ p_h(x_h) &= \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(\xi) P_k \end{aligned} \quad (I.82)$$

où:

$Nbnoe$ et $Nbelt$ sont respectivement le nombre de nœuds et le nombre d'éléments de la triangulation \mathfrak{T}_h ,

$N_k^l, k=1, \dots, Nbnoe$ sont les fonctions d'interpolation linéaire associée au nœud k ,

$N_j^b, j=1, \dots, Nbelt$ la fonction bulle associée à l'élément j ,

V_k, P_k et $X_k, k=1, \dots, Nbnoe$ sont respectivement le champs de vitesse, la pression et les coordonnées spatiales du nœud k , ξ les coordonnées locales de x_h dans l'élément donné.

Le problème discret de (I.74) s'écrit à chaque incrément de temps $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{cases} \text{trouver } (v_h, p_h) \in \mathcal{V}_h^0 \times P_h, \text{ tels que :} \\ \int_{\Omega_h} s(v_h) : \dot{\epsilon}(v_h^*) dV - \int_{\Omega} p_h \text{div } v_h^* dV - \int_{\Gamma_T} T_0 v_h^* dS = 0 \\ \int_{\Omega} p_h^* \left(\text{tr} \dot{\epsilon}(v_h) + \frac{3\dot{p}}{2\mu + 3\lambda} \right) dV = 0 \\ \forall (v_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^0 \times P_h \end{cases} \quad (I.83)$$

où:

$$\mathcal{V}_h^{q0} = \mathcal{V}_h^{q0} \oplus B_h, \mathcal{V}_h^{q0} = \left\{ v_h^l, v_h^l \in \mathcal{V}_h^l, v_{h/\Gamma_c}^l = v_{out} \text{ et } v_{h/\Omega^e}^l \in \left(P^1(\Omega^e) \right)^3, \forall \Omega^e \in \mathfrak{T}_h \right\} \quad (I.84)$$

Le système (I.83) peut être réécrit sous la forme (voir [Coupez 95]):

trouver $(v_h^l, b_h, p_h) \in \mathcal{V}_h^{l0} \times B_h \times P_h$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} s(v_h^l + b_h) : \dot{\epsilon}(v_h^{l*}) dV - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} v_h^{l*} dV - \int_{\Gamma_T} T_0 \cdot v_h^{l*} dS = 0 \\ \int_{\Omega} s(v_h^l + b_h) : \dot{\epsilon}(b_h^*) dV - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} b_h^* dV = 0 \\ \int_{\Omega} p_h^* \left[\operatorname{tr} \dot{\epsilon}(v_h^l + b_h) + \frac{3\dot{p}}{2\mu + 3\lambda} \right] dV = 0 \\ \forall (v_h^{l*}, b_h^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_h^{l0} \times B_h \times P_h \end{array} \right. \quad (I.85)$$

I.3.5.b. Méthode de résolution des équations discrètes

En utilisant la méthode de Galerkin, le système non linéaire (I.85) peut s'écrire synthétiquement sous la forme suivante, où chaque vecteur R remplace l'intégrale correspondante du système:

$$\begin{aligned} R^v(v_h^l, p_h) &= R^{vv} + R^{vb} + R^{vp} + F^v = 0 \\ R^b(b_h, p_h) &= R^{bv} + R^{bb} + R^{bp} = 0 \\ R^p(v_h^l, b_h, p_h) &= R^{pv} + R^{pb} + R^{pp} = 0 \end{aligned} \quad (I.86)$$

Le système d'équations non linéaires (I.86) est résolu par une méthode itérative de type Newton-Raphson. En posant:

$$\begin{aligned} K^{xy}(x, y) &= \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \\ (xy) &\in \{(vv), (vp), (pv), (bb), (bp), (pb), (bv), (vb)\} \end{aligned} \quad (I.87)$$

À chaque itération n de la méthode de Newton-Raphson, le système linéaire à résoudre peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} K^{vv} & K^{vb} & K^{vp} \\ {}^t K^{vb} & K^{bb} & K^{bp} \\ {}^t K^{vp} & {}^t K^{bp} & K^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta b \\ \delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^v \\ R^b \\ R^p \end{pmatrix} \quad (I.88)$$

où $\delta v, \delta b, \delta p$ sont les corrections qui donnent la valeur des champs v_h^l, b_h, p_h à l'itération $n+1$:

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + \delta v \\ b_{n+1} = b_n + \delta b \\ p_{n+1} = p_n + \delta p \end{cases} \quad (I.89)$$

Localement sur chaque élément Ω_e de la triangulation de Ω_h , les degrés de liberté liés au terme bulle sont éliminés (la contribution locale est identique à la globale):

$$\delta b^e = - (K^{bb})^{-1} (R^b + K^{bp} \delta p + K^{vb} \delta v) \quad (I.90)$$

On obtient une formulation mixte en vitesse/pression avec pour seules inconnues les valeurs nodales des trois composantes de la vitesse et des pressions en chaque sommet des tétraèdres.

La résolution du système linéaire sous-jacente à la méthode de Newton Raphson s'effectue par une méthode itérative de type résidu minimal préconditionné. Nous renvoyons le lecteur aux thèses de [Marie 97] et [Perchat 2000] pour de plus amples informations sur cette résolution de (I.85).

Chapitre II

Traitement numérique du contact entre corps déformable et corps rigide

II.1. Introduction

Dans cette partie nous prendrons uniquement en compte le contact entre un corps déformable et un corps rigide. Dans le chapitre suivant nous ferons une extension de cette analyse au cas du contact entre deux corps déformables. Elle nous permettra d'écrire la condition de non-pénétration. Elle sera écrite sur la surface de contact discrétisée du corps déformable. Dans ce chapitre on s'intéresse au traitement discret, la formulation continue étant vu dans I.2.5.a. .

II.2. Gestion incrémentale de la condition de contact

Au cours des incréments de calcul, et en utilisant le schéma d'intégration explicite, on veut prendre en compte le déplacement des nœuds du corps déformable qui peuvent traverser la surface du corps rigide. On veut donc imposer au temps $t + \Delta t$, pour tout nœud M de la surface potentielle de contact:

$$g_n(t + \Delta t) \geq 0 \quad (II.1)$$

Étant donné que l'on écrit les équations du problème au temps t ou en tous cas sur la configuration Ω_t (schéma Euler explicite), l'équation (II.1) est exprimée grâce à une linéarisation d'ordre 1:

$$\begin{aligned}
 g_n(t + \Delta t) &= g_n(t) + \frac{d(g_n(t))}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2) \\
 &= g_n(t) + \frac{d((u_p(t) - u(t)) \cdot n(t))}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2) \\
 &= g_n^t + \frac{d((u_p(t) - u(t)))}{dt} \cdot n(t) \Delta t + (u_p(t) - u(t)) \cdot \frac{d(n(t))}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2)
 \end{aligned} \tag{II.2}$$

On suppose que localement la surface de contact est correctement approchée par le plan tangent issu de P (projeté de M sur l'obstacle) et de \vec{n} la normale en P durant l'incrément de temps Δt . Cela revient à négliger l'évolution de la surface de contact au cours de l'incrément. La linéarisation consiste donc à approcher localement la surface du corps rigide par un plan Π^t (Π^t est défini par $x_p(t)$ et n^t voir FIG. II.1).i.e. :

$$\frac{d(n(t))}{dt} \cong 0 \tag{II.3}$$

L'équation (II.2) devient:

$$\begin{aligned}
 g_n(t + \Delta t) &= g_n(t) + \left(\frac{d(u_p(t))}{dt} - \frac{d(u(t))}{dt} \right) \cdot n(t) \Delta t + O(\Delta t^2) \\
 &= g_n(t) + (v_{out} - v(t)) \cdot n(t) \Delta t + O(\Delta t^2)
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

La condition de non-pénétration (II.1) est réécrite de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 h(v(t)) &\leq 0, \text{ i.e } [h(v(t))]^+ = 0 \\
 \text{où } h(v(t)) &= (v(t) - v_{out}) \cdot n(t) - \frac{g_n(t)}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

où $[x]^+$ désigne la partie positive de x .

Bien que la condition de contact soit exprimée à l'instant $t + \Delta t$, cette formulation de la condition de non-pénétration est dite "explicite". En effet les termes de (II.5) (normale et distance de contact) sont évalués au temps t et sont supposés constants au cours de l'incrément de temps $[t, t + \Delta t]$. De ce fait, lorsque la surface du corps rigide présente une courbure, la condition de contact n'est pas exactement vérifiée à $t + \Delta t$. Cette formulation peut interdire certains déplacements qui sont licites et aussi en accepter d'autres qui sont illicites.

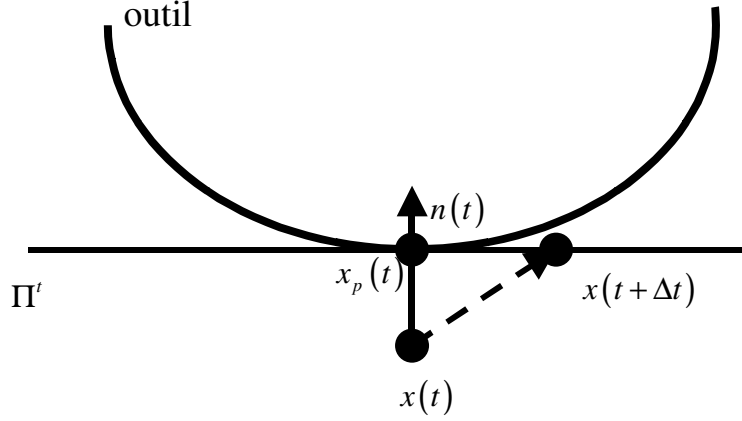


FIG. II.1 - approximation de la surface du corps rigide avec un contact "explicite"

Pour palier à ce problème, dans [Mocellin 99] une autre méthode est présentée. Elle consiste à effectuer une actualisation de la condition de contact à chaque itération de Newton-Raphson (à partir de la précédente), au lieu d'approcher la condition de contact au temps $t + \Delta t$ par des termes au temps t (équation (II.5)). La distance $g_n(t + \Delta t)$ est alors exprimée en fonction de la valeur $g_{n_{iter-1}}(t + \Delta t)$, la distance du nœud au corps rigide au temps t à l'itération $iter - 1$ de Newton-Raphson. Le calcul des distances est donc effectué à chaque itération. L'approximation de la surface du corps rigide par un plan est renouvelée à chaque itération $iter$. Le corps rigide est perçu comme un plan $\Pi_{iter-1}^{t+\Delta t}$ construit à partir des valeurs à $iter - 1$. Pour chaque itération, la condition de non pénétration est donnée par:

$$g_{n_{iter-1}}(t) - (v_{iter} - v_{out}) \cdot n_{iter-1}(t + \Delta t) \Delta t \leq 0 \quad (II.6)$$

où les termes v_{iter} et $n_{iter-1}(t + \Delta t)$ sont respectivement définis comme étant la vitesse calculée à l'itération $iter$ et la normale au plan $\Pi_{iter-1}^{t+\Delta t}$. C'est un algorithme de point fixe sur la surface de contact, intégré à l'algorithme de Newton-Raphson.

II.3. Algorithme de recherche d'obstacle

Dans FORGE3[®] la surface du corps rigide est maillée en triangles. L'analyse du contact entre un corps déformable et un corps rigide s'effectue dans FORGE3[®] en utilisant une hiérarchisation des facettes (triangles) décrivant la surface du corps rigide. Cette hiérarchisation repose sur la définition de sphères de tailles croissantes. Pour chaque facette, la sphère de base a pour centre le barycentre de la facette et pour rayon la plus grande distance de ce barycentre aux sommets de la facette. Les sphères de base les plus proches sont regroupées en une sphère de diamètre supérieur les englobant toutes et ainsi de suite. On construit trois niveaux de sphères dont le premier est constitué des sphères de base. Cette construction est effectuée une seule et unique fois au début de la simulation.

Une fois cette hiérarchisation effectuée, l'algorithme de recherche consiste pour tout nœud frontière de la surface du corps déformable, à chercher la sphère la plus proche

appartenant au troisième niveau. Cette sphère contenant un ensemble de sphères de diamètres plus petits, on effectue une autre recherche pour trouver la sphère la plus proche parmi celles du deuxième niveau. Cette dernière appartenant aux sphères de base est définie à partir d'une facette du corps rigide. On obtient ainsi un ensemble de facettes parmi les plus proches du nœud frontière. En dernier ressort, on recherche parmi celles-ci celle qui est la plus proche et donc qui contient le projeté du nœud frontière sur le corps rigide.

Pour éviter de stocker les données (normales et distances (I.37)) de tous les nœuds de la frontière du corps déformable et surtout pour réduire l'analyse de contact aux seuls nœuds probables, seuls les nœuds dont la distance au corps rigide est inférieure à une distance minimale sont pris en compte. Cette distance minimale correspond à la distance maximum qu'un nœud peut parcourir au cours d'un incrément de temps (voir FIG. II.2).

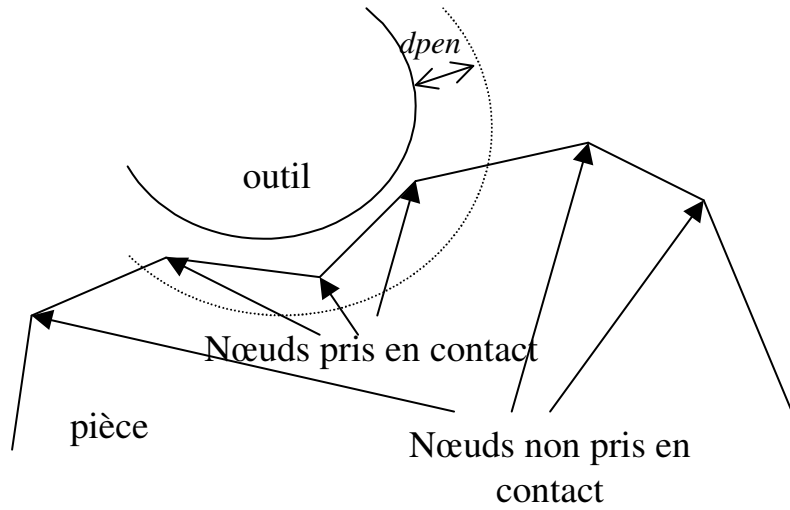


FIG. II.2 – surface potentielle de contact pour l'incrément considéré

II.4. Méthode de résolution

On note par Ω_h la discrétisation du domaine $\Omega(t)$ et on garde la même notation pour les ensembles définissant les frontières. On écrit le problème en utilisant des éléments finis tétraédriques de types $P1 + / P1$ définis dans le premier chapitre.

trouver $(v_h(t), p_h(t)) \in \mathcal{V}_h^0 \times P_h$ tels que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_h} s(v_h(t)) : \dot{\epsilon}(v^*) dV - \int_{\Omega_h} p_h(t) \cdot \text{div } v^* dV - \int_{\Gamma_{\text{frott}}} \tau \cdot v^* dS - \int_{\Gamma_T} T_0 \cdot v^* dS = 0 \\ \int_{\Omega_h} p^* \text{div } v_h(t) dV = 0 \\ \forall (v^*, p^*) \in \mathcal{V}_h \times P_h \end{cases} \quad (II.7)$$

Les espaces d'approximation $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^l \oplus B_h$ et P_h sont définis dans le chapitre I par les ensembles (I.79), (I.80) et (I.80).

$$\mathcal{V}_h^0 = \{v_h \in \mathcal{V}_h, h(v_h) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c\} \quad (II.8)$$

Dans la littérature, plusieurs méthodes sont présentées pour résoudre le problème de contact. Parmi elles on peut citer les méthodes directes qui équivalent à un pré-calcul des contraintes de contact qui sont ensuite introduites dans l'équation d'équilibre. Ces contraintes de contact sont considérées comme des forces externes supplémentaires qui agissent à l'interface. Les forces de contact sont calculées à partir des équations de contact et de frottement. Ces méthodes nécessitent la construction d'une matrice (matrice d'influence ou de flexibilité). Le coût de ce calcul augmente, généralement de façon considérable, avec le nombre de nœuds qui entrent en contact.

Une autre méthode apparentée aux méthodes directes consiste à imposer la condition de contact par élimination. Les nœuds en contact sont traités par une méthode de reprojction. À chaque fin d'incrément, les nœuds ayant pénétré dans le corps rigide, sont projetés à sa surface et on leur affecte la composante normale de la vitesse du corps rigide. Une autre façon de procéder, pour limiter les variations de volume, est de leur affecter une composante normale de vitesse de telle sorte qu'au prochain incrément ils soient ramenés à la surface du corps rigide. Le traitement du décollement des nœuds s'effectue à la fin de l'incrément de temps par le calcul de la contrainte normale de contact en chaque nœud en contact.

Pour imposer la condition de contact unilatéral, dans la littérature on utilise très souvent des méthodes avec des multiplicateurs de Lagrange ou des méthodes de pénalisation [Wriggers *et al.* 97]. On trouve aussi d'autres méthodes combinant ces deux dernières, notamment la méthode du Lagragien augmenté [Fortin *et al.* 92]. Nous présentons dans la suite la résolution du problème de contact en utilisant les multiplicateurs de Lagrange et la méthode de pénalisation.

II.4.1. Méthodes des multiplicateurs de Lagrange

Le principe de base de cette méthode est d'introduire des inconnues supplémentaires, les multiplicateurs de Lagrange, pour résoudre le problème d'équilibre (II.7) avec les conditions de contact. Le problème s'écrit:

trouver $(v, p, \lambda) \in \mathcal{V}_h \times P_h \times M_h$ tel que $\lambda \leq 0$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} s(v_h) : \dot{\varepsilon}(v^*) dV - \int_{\Omega_h} p_h \operatorname{div} v^* dV - \int_{\Gamma_{\text{frott}}} \tau(v_h) \cdot v^* dS - \int_{\Gamma_T} T_0 \cdot v^* dS - \int_{\Gamma_c} \lambda_h h(v^*) dS \\ \int_{\Omega_h} p^* \operatorname{div} v_h dV = 0 \\ - \int_{\Gamma_c} \lambda^* h(v_h) dS \leq 0 \\ \forall (v^*, p^*, \lambda^*) \in \mathcal{V}_h \times P_h \times M_h, \lambda^* \leq 0 \end{array} \right. \quad (II.9)$$

Γ_c est la surface de contact potentiel.

Les multiplicateurs de Lagrange sont les valeurs de la contrainte normale de contact σ_n (opposée de la pression de contact) au sens faible:

$$\sigma_n = \lambda_h \quad (II.10)$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange rajoute des inconnues. Elle présente l'avantage de satisfaire exactement les conditions de contact sans pour autant nécessiter des coefficients réglables comme dans les méthodes de pénalisation.

On trouve dans la littérature des espaces d'interpolation de ces multiplicateurs en 2D ([Hild 98]). Nous noterons par $(\varphi_m)_{m=1, nbnfr_c}$ les fonctions d'interpolation des multiplicateurs de Lagrange λ_h ($nbnfr_c$ est le nombre de nœuds frontières appartenant à la discrétisation de Γ_c). Nous choisirons des fonctions continues et affines par morceaux sur Γ_c , c'est à dire obtenues par la restriction à la surface de notre interpolation quasi-isoparamétrique en tétraèdres $P1$. On écrit donc:

$$\lambda_h(x_h) = \sum_{m=1}^{nbnfr_c} \Lambda_m \varphi_m(x_h) \quad x_h \in \Gamma_c \quad (II.11)$$

où les $(\Lambda_m)_m$ sont les valeurs des multiplicateurs de Lagrange aux nœuds frontières.

Dans le système non linéaire de nouveaux termes sont introduits pour prendre en compte les multiplicateurs de Lagrange discrets. On remarque qu'il n'y a pas de termes de couplage entre les multiplicateurs de Lagrange et le terme bulle, qui est nul aux bords des éléments de la triangulation et donc sur la zone de contact Γ_c où sont définis les multiplicateurs de Lagrange.

La condition de contact unilatéral admet une singularité lorsqu'elle est nulle. En différentiant cette condition on a deux dérivées possibles, l'une à gauche l'autre à droite. Avec cette méthode de Lagrangien pur, on ne peut choisir qu'arbitrairement entre la dérivée à droite ou la dérivée à gauche ce qui nécessite d'utiliser un algorithme de type "point fixe" [Vieilledent 99] dont la convergence peut être difficile en 3D.

II.4.2. Méthode de pénalisation

La résolution du problème de contact par la méthode de pénalisation est très souvent utilisée dans la pratique. L'un de ses avantages est de permettre un choix facile de la dérivée de la condition de contact unilatéral. Avec un contact nodal et la méthode de pénalisation, le système (II.9) s'écrit:

$$\begin{cases} \text{trouver } (v_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times P_h \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} s(v_h) : \dot{\varepsilon}(v^*) dV - \int_{\Omega_h} p_h \operatorname{div} v^* dV - \int_{\Gamma_{\text{front}}} \tau(v_h) \cdot v^* dS - \int_{\Gamma_T} T_0 \cdot v^* dS \\ - \rho \sum_{x_k \in \Gamma_c} [h(v_h(x_k))]^+ S(x_k) (n(x_k) \cdot v^*) = 0 \\ \int_{\Omega_h} p^* \operatorname{div} v_h dV = 0 \\ \forall (v^*, p^*) \in \mathcal{V}_h \times P_h \end{array} \right. \end{cases} \quad (II.12)$$

où ρ est le coefficient de pénalisation, $S(x_k)$ est la surface associée au nœud k utilisée pour affecter un poids plus fort aux nœuds liés à des triangles de plus grande surface:

$$S(x_k) = \int_{\partial\Gamma} N^k dS \quad (II.13)$$

On peut ainsi montrer que la contrainte normale de contact σ_n est approchée en $O(1/\rho)$ par:

$$\sigma_n(x_k) = -\rho h(v_h(x_k)) \quad (II.14)$$

La méthode de pénalisation n'augmente pas le nombre d'inconnues du problème. Pour une résolution exacte des conditions de contact, il faudrait que $\rho \rightarrow +\infty$ ce qui engendre un très mauvais conditionnement des matrices pour la résolution une méthode itérative du système linéaire. Cette méthode est simple à mettre en œuvre car elle ne nécessite pas la résolution d'autres systèmes d'équations. Une des faiblesses est que l'on accepte une pénétration du corps déformable dans le corps rigide (dans la pratique on ne peut pas choisir exactement $\rho = +\infty$ pour satisfaire exactement la condition de non-pénétration). Par ailleurs, il est inutile de prendre ρ trop grand, dans la mesure où la précision ainsi obtenue ne serait pas cohérente avec celle du maillage, du pas de temps ou de la discrétisation des outils. On doit même prendre ρ assez faible pour ne pas avoir de problème de convergence. Dans la pratique $\rho \cong 10^2$ offre le meilleur compromis, ce qui signifie que la condition de contact est vérifiée en moyenne avec une précision relative de $O(1/\rho) \cong 10^{-2}$.

Du point de vue physique, la pénalisation peut être interprétée comme la création d'une force répulsive permettant de prévenir la pénétration. La gestion du décollement s'effectue de façon automatique à partir de l'expression (II.5). Localement si un nœud du corps déformable a tendance à quitter le contact alors le terme à l'intérieur de $[\]^+$ dans l'équation (II.5) est négatif et donc $h(v_h)$ est nul. Le nœud est alors libre car soumis à aucune force. Par contre, s'il veut rentrer en contact, $h(v_h)$ est non nul et donc le nœud est soumis à une force répulsive lui permettant de demeurer sur la surface de contact.

Du fait de la présence de la valeur absolue dans l'expression de $[h(v_h)]^+$ le choix de la dérivée se pose pour $h(v_h) = 0$ lors du calcul du heissien. Avec la méthode de pénalisation, on remplace en fait la condition (II.5) par:

$$h(v_h) < \varepsilon \text{ où } \varepsilon = O\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (II.15)$$

On peut ainsi avoir :

$$v_h \text{ tel que } 0 \leq h(v_h) \leq \varepsilon \quad (1) \quad (II.16)$$

$$v_h \text{ tel que } h(v_h) \leq 0 \quad (2)$$

Les équations (II.16) vérifient tous les deux la condition de contact pénalisée mais compte-tenu de (II.14) on a (FIG. II.3):

Pour (1): $\sigma_n < 0$ le nœud est en contact (II.17)

Pour (2): $\sigma_n = 0$ le nœud appartient à la surface libre

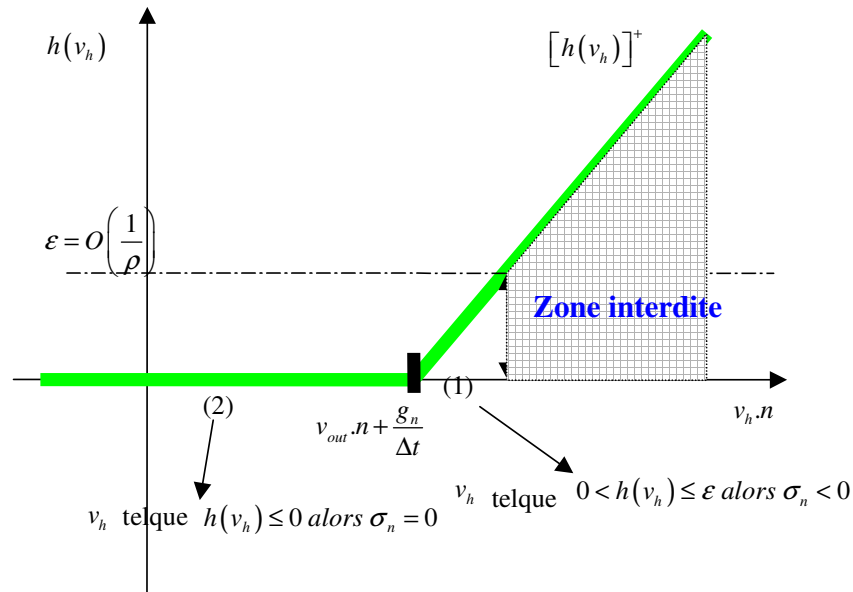


FIG. II.3 – pénalisation de la condition de contact

Ainsi la méthode de pénalisation permet-elle de choisir une dérivée pour $[h(v)]^+ \cong \varepsilon$.

C'est le principale intérêt de la méthode de pénalisation (pure ou combiné à des multiplicateurs de Lagrange), elle permet de généraliser le calcul du hessien [Alart *et al.* 98].

Deuxième partie

Problème multi-corps

Chapitre III

Contact entre corps déformables

III.1. Introduction

Nous utiliserons le terme de contact entre corps déformables pour désigner de façon générale :

- un contact entre deux sous ensembles d'un même matériau (cas de repli de matière par exemple)
- un contact entre des corps déformables de rhéologies différentes.

Dans la suite nous désignerons par Ω^1 et Ω^2 les domaines qu'occupent les deux corps déformables dans IR^3 . Nous noterons par Γ_c^l l'interface de contact du corps Ω^l , $l = 1, 2$. Dans le problème continu on a : $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$, mais de façon générale après discrétisation, l'interface de contact entre les différents corps en contact n'est pas exactement la même, sauf dans le cas où les maillages des deux corps sont coïncidents sur leur interface. En effet, généralement et pour des raisons d'efficacité, la géométrie de chaque corps est discrétisée de façon indépendante. Ceci permet de se départir du problème complexe de maintenir, à chaque pas de temps, des maillages surfaciques coïncidents ([Gratacos 91]). Dans la suite nous n'envisagerons pas ce cas où l'interface de contact est la même sur les deux corps.

La technique dite du maître/esclave est alors souvent utilisée. Elle consiste à écrire les conditions de contact et de frottement sur la surface d'un seul des corps (le corps esclave). La distance de contact (I.37) est évaluée aux points de celui-ci par rapport au corps maître. Cette analyse de contact est assez analogue à celle du contact avec un corps rigide, à la différence de fond que les vitesses des deux corps sont des inconnues du problème.

Le contact entre corps déformables peut être considéré comme une réunion de problèmes fortement couplés par les équations de contact et de frottement. Deux méthodes sont principalement utilisées dans la littérature. La première est un algorithme de point fixe. Elle considère un corps comme étant fixe (Ω^1 par exemple) pendant la résolution des équations d'équilibre (I.85) sur l'autre corps (Ω^2 par exemple). Les forces de contact résultantes calculées sur Ω_2 sont ensuite imposées sur Γ_c^1 pour résoudre le problème d'équilibre (I.85) sur Ω^1 . On itère l'algorithme jusqu'à ce que l'interface n'évolue plus. La convergence de cet algorithme n'est pas toujours assurée quand les déformations sont du même ordre de grandeur sur les deux corps (voir [Jaouen 98]). Une variante de cette méthode est de faire une seule itération lorsque les déformations de l'interface sont faibles à chaque pas de temps. Le problème de contact est alors pris en compte de manière faiblement couplée lors de l'intégration temporelle. Mais des fortes oscillations numériques subsistent quand les deux corps sont de même nature.

Une deuxième méthode, celle que nous avons mise en œuvre, est la résolution globale simultanée sur tous les corps. Les conditions de contact et de frottement induisent des termes de couplage qui augmentent considérablement la largeur de bande du système à résoudre. Les méthodes de résolutions directes sont donc inappropriées car leur coût augmente dramatiquement. Par contre les méthodes itératives ne font pas apparaître cette difficulté puisque la largeur de bande reste locale.

Dans la suite, une fois les équations écrites, nous décrirons l'extension de l'analyse du contact entre un corps rigide et un corps déformable à celle du contact entre corps déformables. Ensuite nous présenterons une formulation nodale des équations de contact et de frottement. Une intégration rigoureuse des termes de frottement aux points d'intégration s'avèrera nécessaire pour des calculs précis.

III.2. Formulation du problème

En utilisant toujours le formalisme du lagrangien réactualisé, l'intégration temporelle est effectuée par le schéma d'Euler explicite sur chacun des corps:

$$\begin{aligned} (x^l(t), \Omega^l(t)) &\xrightarrow{v^l(t)} (x^l(t+\Delta t), \Omega^l(t+\Delta t)) \\ x^l(t+\Delta t) &= x^l(t) + \Delta t v^l(t) \end{aligned} \quad l=1,2 \quad (III.1)$$

La frontière $\partial\Omega^l(t)$ du domaine $\Omega^l(t)$ supposée régulière est composée de quatre parties:

$$\partial\Omega^l(t) = \Gamma_v^l \cup \Gamma_T^l \cup \Gamma_c^l \cup \Gamma_F^l \quad (III.2)$$

Sur Γ_F^l on impose une contrainte nulle (surface libre), sur Γ_T^l on impose une contrainte non nulle T_0^l , $\Gamma_c^l = \Gamma_c$ est l'interface de contact entre les deux domaines et sur Γ_v^l on impose une vitesse constante. Le vecteur normal unitaire sortant de $\Omega^l(t)$ est noté $n^l(t)$.

Le problème consiste à trouver le champ de vitesse $v(t) = (v^1(t), v^2(t))$ avec $v^l(t) = v_{|\Omega^l(t)}(t)$ et le champ de pression $p(t) = (p^1(t), p^2(t))$ avec $p^l(t) = p_{|\Omega^l(t)}(t)$ vérifiant les conditions suivantes pour $l = 1, 2$:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} s(v^l(t)) - \nabla p^l(t) &= 0 \\ \operatorname{div} v^l(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{sur } \Omega^l(t) \quad (III.3)$$

$$\sigma^l(t) n^l(t) = T_0^l \text{ sur } \Gamma_T^l$$

$$v^l(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_v^l$$

+ les conditions de contact

Par soucis de simplification de l'exposé nous négligerons les déformations élastiques et les deux corps ont une rhéologie purement viscoplastique.

Les conditions sur la surface de contact $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$ sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \sigma^1 n^1(t) &= -\sigma^2 n^2(t) \\ n^1 &= -n^2 = n \\ (\sigma^1 n^1) \cdot n^1 &= (\sigma^2 n^2) \cdot n^2(t) = \sigma_n(t) \\ [\sigma^1 n^1 - \sigma_n n^1] &= -[\sigma^2 n^2 - \sigma_n n^2] = \tau \\ g_n(t + \Delta t) &\geq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \sigma_n g_n(t + \Delta t) = 0 \end{aligned} \quad (III.4)$$

La dernière condition de (III.4) est la condition de contact unilatéral implicite (écrite au temps $t + \Delta t$):

$$g_n(t) = -u^1(t) \cdot n^1(t) - u^2(t) \cdot n^2(t) \quad (III.5)$$

$u^l(t)$ est le vecteur de déplacement (équation (I.2)) défini sur $\Omega^l(t)$. En faisant l'hypothèse que localement la surface de contact est approchée par le plan tangent durant l'incrément de temps et compte-tenu de (III.1), la linéarisation de l'équation (III.5) nous permet d'exprimer la condition de contact unilatéral à $t + \Delta t$ avec les vitesses calculées au temps t :

$$\begin{aligned} g_n(t + \Delta t) &= g_n(t) - \Delta t [v^1(t) \cdot n^1(t) + v^2(t) \cdot n^2(t)] + O(\Delta t^2) \\ v^1(t) \cdot n^1(t) + v^2(t) \cdot n^2(t) - \frac{g_n(t)}{\Delta t} &\leq 0 \end{aligned} \quad (III.6)$$

Dans la suite la condition de contact unilatéral est exprimée comme suit:

$$\begin{aligned} [h(v^1(t), v^2(t))] &^+ = 0 \\ \text{où } h(v^1(t), v^2(t)) &= v^1(t) \cdot n^1(t) + v^2(t) \cdot n^2(t) - \frac{g_n(t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (III.7)$$

avec $[x]^+$ qui représente la partie positive de x .

Les lois de frottement sont identiques à celles présentées dans (I.50), (I.55) et (I.56). La vitesse de glissement tangentielle est donnée en première approximation par:

$$\Delta v_i = \{v^1(t) - [v^1(t) \cdot n^1(t)]n^1(t)\} - \{v^2(t) - [v^2(t) \cdot n^2(t)]n^2(t)\} \quad (III.8)$$

On définit les espaces :

$$\mathcal{V}(\Omega^l(t)) = \left\{ v \in \left(H^1(\Omega^l(t)) \right)^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_v^l \right\} \quad (III.9)$$

avec $H^1(\Omega^l(t))$ l'espace de Sobolev des distributions de carré intégrable sur $\Omega^l(t)$ ainsi que leur dérivée première. On notera par $v = (v^1, v^2)$ un champ de vecteurs de l'espace produit $\mathcal{V}(\Omega^1(t)) \times \mathcal{V}(\Omega^2(t))$. L'espace des vitesses cinématiquement admissibles est contenu dans $\mathcal{V}(\Omega^1(t)) \times \mathcal{V}(\Omega^2(t))$ et inclut la condition de non-interpénétration (III.7) :

$$\mathcal{V}^{ca} = \left\{ v(t) = (v^1(t), v^2(t)) \in \mathcal{V}(\Omega^1(t)) \times \mathcal{V}(\Omega^2(t)), h(v(t)) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\} \quad (III.10)$$

La formulation variationnelle (ou formulation faible) du problème (III.3) avec les conditions de contact et de frottement s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (v, p) \text{ tels que :} \\ & v = (v^1, v^2) \in \mathcal{V}^{ca}, p = (p^1, p^2) \in L^2(\Omega^1(t)) \times L^2(\Omega^2(t)) \\ & \sum_{l=1}^2 \left\{ \int_{\Omega^l(t)} s(v^l(t)) : \dot{\varepsilon}(w^l) dV - \int_{\Omega^l(t)} p^l \operatorname{div}(w^l) dV - \int_{\Gamma_t^l} T_0^l \cdot w^l dS \right\} \\ & \quad - \int_{\Gamma_{frott}} \tau(v) \cdot \Delta w_t dS = 0 \quad (III.11) \\ & \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l(t)} q^l \operatorname{div}(v^l) dV = 0 \end{aligned}$$

$$\forall w = (w^1, w^2) \in \mathcal{V}(\Omega^1(t)) \times \mathcal{V}(\Omega^2(t)), \forall q = (q^1, q^2) \in L^2(\Omega^1(t)) \times L^2(\Omega^2(t))$$

avec Γ_{frott} l'ensemble:

$$\Gamma_{frott} = \{x(t) \in \Gamma_c, g_n(t) = 0 \text{ et } \sigma_n(t) < 0\} \quad (III.12)$$

III.3. Discrétisation spatiale

Nous considérons $\Omega_h^l(t)$ ($l=1,2$) le domaine polygonal discrétisant le domaine $\Omega^l(t)$ ($l=1,2$). À chaque domaine Ω_h^l on associe une triangulation (ou maillage) \mathfrak{K}_h^l constituée d'un ensemble fini de tétraèdres:

$$\bar{\Omega}_h^l = \bigcup_{\Omega_e^l \in \mathfrak{K}_h^l} \Omega_e^l \quad (III.13)$$

La zone de contact Γ_c est discrétisée sur chaque domaine polygonal Ω_h^l et on note par $\mathfrak{K}_{c,h}^l$ l'ensemble des triangles de $\Omega_e^l \in \mathfrak{K}_h^l$ sur la zone de contact. L'ensemble des nœuds associés à $\mathfrak{K}_{c,h}^l$ est noté ζ_h^l . Dans le cadre de ce manuscrit les ensembles ζ_h^1 et ζ_h^2 ne sont pas considérés comme identiques du fait que les deux domaines Ω^1 et Ω^2 sont discrétisés indépendamment l'un de l'autre. La triangulation de la frontière de Ω_h^l est notée $\partial \mathfrak{K}_h^l$. Les

opérations de remaillage et de transport sont effectuées indépendamment sur chaque domaine comme indiqué dans le chapitre I dans le cas où on a un seul corps déformable.

Pour discrétiser la vitesse et la pression sur les maillages on utilise, comme dans le chapitre I, des éléments mixtes P^{1+} / P^1 .

On note par:

$$\mathcal{V}_h^{l,lin} = \left\{ v_h^{l,lin}, v_h^{l,lin} \in \left(C^0(\Omega_h^l) \right)^3, v_h^{l,lin} /_{\Gamma_{v,h}^l} = 0 \text{ et } v_h^{l,lin} /_{\Omega_e^l} \in \left(P^1(\Omega_e^l) \right)^3, \forall \Omega_e^l \in \mathfrak{T}_h^l \right\} \quad (III.14)$$

L'espace définissant la partie linéaire de la vitesse où:

$C^0(\Omega_h^l)$ est l'espace des fonctions continues sur le domaine $\Omega_h^l \subset \mathbb{R}^3$.

$(P^1(\Omega_e^l))^3$ est l'espace des fonctions linéaires sur l'élément $\Omega_e^l \subset \mathbb{R}^3$.

$\Gamma_{v,h}^l$ la discrétisation de Γ_v .

On introduit l'espace B_h^l des fonctions bulles linéaires par morceaux sur Ω_e^l pour éviter les difficultés liées à l'intégration des polynômes de degré 4 et pour réduire la différence de degrés entre les interpolations [Coupez 95]. B_h^l est donc défini par:

$$B_h^l = \left\{ b_h^l, b_h^l \in \left(C^0(\Omega_h^l) \right)^3, \forall \Omega_e^l \in \Gamma_h^l, b_h^l /_{\partial \Omega_{e,i}^l} = 0, b_h^l /_{\Omega_{e,i}^l} \in \left(P^1(\Omega_{e,i}^l) \right)^3, i=1, \dots, 4 \right\} \quad (III.15)$$

où les $\Omega_{e,i}^l, i=1, \dots, 4$ sont les sous-tétraèdres du tétraèdre Ω_e^l dont le centre est un sommet commun aux sous-tétraèdres. Les éléments de B_h^l sont donc continus sur l'élément Ω_e^l mais pas dérivables.

Le champs de vitesse v_h^l se décompose sur chaque domaine en une partie linéaire $v_h^{l,lin}$ et une partie bulle b_h^l :

$$\begin{aligned} v_h^l &= v_h^{l,lin} + b_h^l \\ v_h^l \in \mathcal{V}_h^l &= \mathcal{V}_h^{l,lin} \oplus B_h^l \\ v_h^{l,lin} &\in \mathcal{V}_h^{l,lin} \\ b_h^l &\in B_h^l \end{aligned} \quad (III.16)$$

Le champ de pression est linéaire et continu sur chaque domaine:

$$P_h^l = \left\{ p_h^l, p_h^l \in C^0(\Omega_h^l) \text{ et } p_h^l /_{\Omega_e^l} \in P^1(\Omega_e^l), \forall \Omega_e^l \in \mathfrak{T}_h^l \right\} \quad (III.17)$$

L'interface de contact discrète n'est pas unique que l'on soit sur un corps ou sur un autre; de plus pour éviter d'écrire les conditions de contact sur les deux interfaces (problème surcontraint), on écrit la condition de contact uniquement sur une des deux interfaces. Nous l'écrivons sur $\Gamma_c = \Gamma_{c,h}^l$ (interface esclave). L'espace des vitesses admissibles est écrit sous la forme :

$$\mathcal{V}_h^{ca} = \left\{ v_h = (v_h^1, v_h^2) \in \mathcal{V}_h^1 \times \mathcal{V}_h^2, \text{ tel que condition de contact discrète sur } \Gamma_c \right\} \quad (III.18)$$

Le problème discret associé devient:

trouver $v_h = (v_h^1, v_h^2) \in \mathcal{V}_h^{ca}$ et $p_h = (p_h^1, p_h^2) \in L^2(\Omega_h^1) \times L^2(\Omega_h^2)$ tel que :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega_h^l} s(v_h^l) : \dot{\varepsilon}(v_l^*) dV - \int_{\Omega_h^l} p_h^l \operatorname{div}(v_l^*) dV \\
 & + \int_{\Gamma_{\text{front}}^1} \tau(v_h) \cdot (v_1^* - v_2^*) dS - \int_{\Gamma_T^1} T_0^1 \cdot v_1^* dS - \int_{\Gamma_T^2} T_0^2 \cdot v_2^* dS = 0 \\
 & \int_{\Omega_h^1} p_1^* \operatorname{div}(v_h^1) dV = 0 \\
 & \int_{\Omega_h^2} p_2^* \operatorname{div}(v_h^2) dV = 0 \\
 & \forall (v_1^*, v_2^*) \in \mathcal{V}_h^{ca}, (p_1^*, p_2^*) \in L^2(\Omega_h^1) \times L^2(\Omega_h^2)
 \end{aligned} \tag{III.19}$$

En utilisant les fonctions de formes linéaires et bulles, en chaque point $x_h^l \in \Omega_h^l$, on a :

$$\begin{aligned}
 v_h^1(x_h^1) &= \sum_{k=1}^{Nbnoe^1} N_k^{lin}(\xi) V_k^1 + \sum_{j=1}^{Nbelt^1} N_j^b(\xi) B_j^1 \\
 v_h^2(x_h^2) &= \sum_{k=Nbnoe^1+1}^{Nbnoe} N_k^{lin}(\xi) V_k^2 + \sum_{j=Nbelt^1+1}^{Nbelt} N_j^b(\xi) B_j^2 \\
 x_h^1 &= \sum_{k=1}^{Nbnoe^1} N_k^{lin}(\xi) X_k^1 \\
 x_h^2 &= \sum_{k=Nbnoe^1+1}^{Nbnoe} N_k^{lin}(\xi) X_k^2 \\
 p_h^1(x_h^1) &= \sum_{k=1}^{Nbnoe^1} N_k^{lin}(\xi) P_k^1 \\
 p_h^2(x_h^2) &= \sum_{k=Nbnoe^1+1}^{Nbnoe} N_k^{lin}(\xi) P_k^2
 \end{aligned} \tag{III.20}$$

où :

$Nbnoe^1$ et $Nbelt^1$ sont respectivement le nombre de nœuds et le nombre d'éléments de la triangulation \mathfrak{K}_h^1 ,

N_k^{lin} $k=1, \dots, Nbnoe$ sont les fonctions d'interpolation linéaire associée au nœud k ,

N_j^b , $j=1, \dots, Nbelt$ la fonction bulle associée à l'élément j ,

V_k^l, P_k^l et X_k^l , $k=1, \dots, Nbnoe$ sont respectivement le champs de vitesse, la pression et les coordonnées spatiales du nœud k , ξ les coordonnées locales de x_h^l dans l'élément donné.

III.4. Généralisation de la détection du contact

Comme dans le cas du problème de contact avec un corps rigide, l'analyse de contact est effectuée aux nœuds. Nous avons gardé le même algorithme de recherche d'obstacle et donc de recherche de la face où se projette le nœud. Pour ce faire, la surface du corps maître est considérée comme étant celle d'un corps rigide, et ainsi la même analyse est effectuée. Cependant, le contact entre corps déformables nécessite de connaître la vitesse $v_h^2(x_k)$ de chaque projeté x_k de tout point x_k .

Soit $x_k \in \partial \mathfrak{K}_h^1$ un nœud de la surface du corps esclave, la procédure pour obtenir la position correspondante sur le corps maître est la suivante:

- grâce au tri hiérarchique (réalisé comme dans le cas du contact avec un outil rigide) mais cette fois sur la surface du corps maître: la surface du corps maître est devenue l'obstacle, une première sélection d'un ensemble de faces de $\partial \mathfrak{K}_h^2$ proches de x_k est effectué, on définit l'opérateur de projection orthogonale sur $\partial \Omega_h^2$ par:

$$\begin{aligned} \pi^2 : \partial \Omega_h^1 &\rightarrow \partial \Omega_h^2 \\ x_k &\mapsto x_{k'} = \pi^2(x_k) \end{aligned} \quad (III.21)$$

La surface $\partial \Omega_h^2$ étant discrétisée par des triangles, le projeté $x_{k'}$ d'un point de l'esclave se localise sur une face, $F^2 = (A_i^2)_{i=1,3}$ (les A_i^2 sont les trois points du maillage de Ω^2 qui définissent la face F^2). La position du projeté est obtenue à partir des coordonnées barycentriques de ce dernier sur la face F^2 , on a :

$$\begin{aligned} x_{k'} &= (1 - \xi_1 - \xi_2) A_1^2 + \xi_1 A_2^2 + \xi_2 A_3^2, \\ \text{avec :} \\ 0 &\leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1, 0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (III.22)$$

L'ensemble constitué par le nœud x_k et les trois nœuds $(A_i^2)_{i=1,3}$ sera dénommé élément fictif de contact. Du fait qu'il constitue un élément tétraédrique (de volume éventuellement nul), il permet, lors de l'implémentation informatique, de considérer l'ensemble du système constitué par les corps déformables comme un tout (voir FIG. III.1), ce qui facilite l'écriture des équations matricielles.

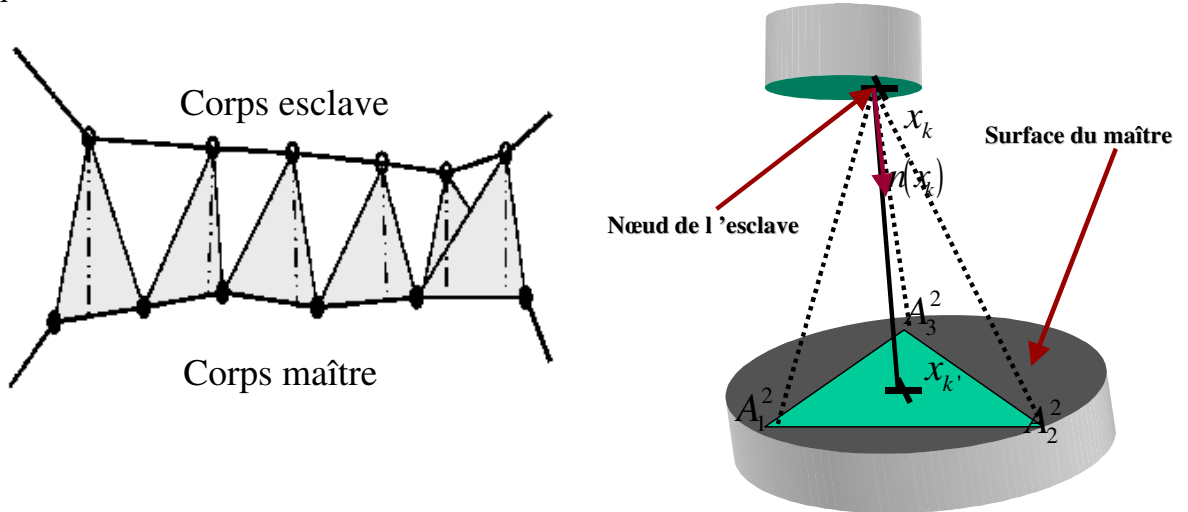


FIG. III.1 – Eléments fictifs de contact

La distance qui sépare le nœud x_k de son projeté est donné par :

$$g_n(x_k) = |x_k x_{k'}|, \text{ où } |\cdot| \text{ désigne la mesure algébrique} \quad (III.23)$$

On définit la normale extérieure au nœud x_k par :

$$n(x_k) = \begin{cases} -\frac{1}{g_n(x_k)} \overrightarrow{x_k \cdot x_k} & \text{si } g_n(x_k) \neq 0 \\ -n_{F^2} & \text{si } g_n(x_k) = 0 \end{cases} \quad (III.24)$$

n_{F^2} est la normale sortante de la face F^2 (où se projette le nœud x_k).

Dans la suite l'espace \mathcal{V}_h^{ca} sera écrit en utilisant un raccordement des interfaces de contact aux nœuds i.e on utilise une formulation avec un contact nodal comme dans le chapitre II:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h^{ca} = \{ & v_h = (v_h^1, v_h^2) \in \mathcal{V}_h^1 \times \mathcal{V}_h^2, h(v_h^1(x_k)) \leq 0, \text{ si } x_k \in \zeta_h^1 \} \\ & h(v_h^1(x_k)) = [v_h^1(x_k) - v_h^2(x_k)] \cdot n(x_k) - \frac{g_n(x_k)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (III.25)$$

On utilise ici un raccordement ponctuel. D'autres types de raccordement peuvent être utilisés par exemple un raccordement aux points d'intégration [El Abassi *et al.* 01], ou un raccord projeté ou intégral [Hild 98].

III.5. Formulation nodale du contact et du frottement entre corps déformables

En utilisant la formulation pénalisée et l'écriture nodale des conditions de contact du chapitre II, le problème s'écrit:

trouver (v_h, p_h) tel que :

$$\begin{aligned} \forall k = 1, \dots, nbnoe, x_k \in \mathfrak{K}_h = \mathfrak{K}_h^1 \cup \mathfrak{K}_h^2, \forall \lambda \in \{1, 2, 3\} \\ \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\Omega_e \in \mathfrak{K}_h} \left\{ \int_{\Omega_e} s(v_h) : B_{\lambda k} dV - \int_{\Omega_e} p_h tr(B_{\lambda k}) dV \right\} - \int_{\Gamma_{frott}} \tau(v_h) \cdot e_\lambda N_k dS - \int_{\Gamma_T} T_{0,k} \cdot e_\lambda N_k dS \\ & + \rho 1_{\zeta_h^1}(x_k) S(x_k) [h(v_h(x_k))]^+ n(x_k) \cdot e_\lambda \\ & - \rho \sum_{\substack{x_{k'} \in \zeta_h^1 / \exists F \in \partial \mathfrak{K}_h^2 \\ x_k \in F \text{ et } \pi^2(x_k) \in F}} N_{k'}(x_k) 1_{\zeta_h^2}(x_k) S(x_{k'}) [h(v_h(x_{k'}))]^+ n(x_{k'}) \cdot e_\lambda = 0 \\ & \sum_{\Omega_e \in \mathfrak{K}_h} \left\{ \int_{\Omega_e} N_k div(v_h) dV \right\} = 0 \end{aligned} \right. \quad (III.26) \end{aligned}$$

e_λ le vecteur unitaire dans la direction λ

$$1_{\zeta_h^l}(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \in \zeta_h^l \\ 0 & \text{si } x_k \notin \zeta_h^l \end{cases}$$

$S(x_k)$ est la surface de pondération associée au nœud x_k (FIG. III.2):

$$S(x_k) = \int_{\partial \Omega_h^1} N_k dS = \frac{1}{3} \sum_{F^1 \in \partial \mathfrak{K}_h^1 / k \in F^1} surface(F^1) \quad (III.27)$$

où $surface(F^1)$ est l'aire de la face F^1 dont un des sommets est x_k . Les surfaces de pondération $S(x_k)$ sont calculées de manière à ce que :

$$\sum_{x_k \in \zeta_h^1} S(x_k) = |\Gamma_{c,h}^1| \quad (III.28)$$

où $|\Gamma_{c,h}^1|$ est l'aire totale de $\Gamma_{c,h}^1$. La figure ci-dessus est une illustration de leur calcul.

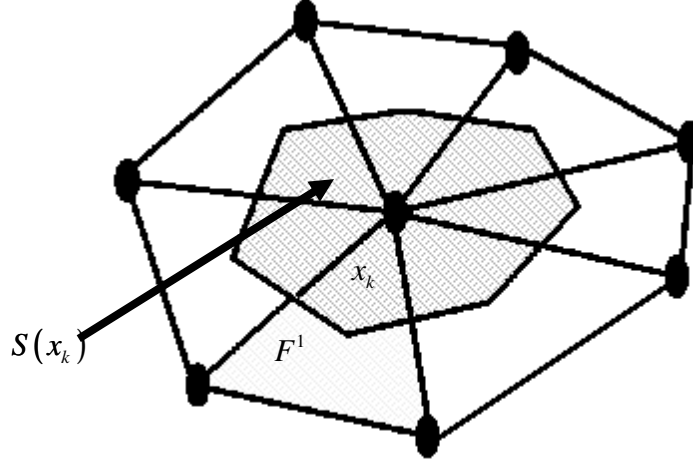


FIG. III.2 – surface affectée aux nœuds frontières pour la pénalisation

III.5.1. Conditions de contact entre corps déformables

Dans cette partie nous nous intéresserons à :

$$R_{contact}^{k\lambda} = \rho 1_{\zeta_h^1}(x_k) S(x_k) [h(v_h(x_k))]^+ n(x_k).e_\lambda - \rho \sum_{\substack{x_{k'} \in \zeta_h^1 / \exists F \in \partial \mathfrak{K}_h^2 \\ x_k \in F \text{ et } \pi^2(x_k) \in F}} N_{k'}(x_k) 1_{\zeta_h^2}(x_k) S(x_{k'}) [h(v_h(x_{k'}))]^+ n(x_{k'}).e_\lambda \quad (III.29)$$

Pour calculer (III.29) l'analyse de contact fournit les informations suivantes :

- le corps en vis-à-vis (dans le cas où plusieurs corps sont en contact),
- la face ($F^2 = (A_i^2)_{i=1,3}$) où se localise le projeté,
- les coordonnées barycentriques $(\xi_i)_{i=1,2}$ du projeté de x_k sur F^2 ,
- la mesure algébrique de la distance entre le point x_k et son projeté $g_n(x_k)$,
- la normale externe $n(x_k)$ défini par (III.24) au point x_k .

Sans nuire à la généralité, on considère que le terme de contact s'exprime, pour chaque nœud x_k de ζ_h^1 , sous la forme d'un potentiel donné par :

$$\Phi_{contact} = \frac{1}{2} \rho \sum_{x_k \in \zeta_h^1} \{h[v_h^1(x_k)]\}^{+2} S(x_k) = \sum_{x_k \in \zeta_h^1} \Phi_{contact}^k \quad (III.30)$$

$$\text{où } \Phi_{contact}^k = \frac{1}{2} \rho \{h[v_h^1(x_k)]\}^{+2} S(x_k) \quad (III.31)$$

est le potentiel de contact local associé au nœud x_k .

$$\Phi_{contact}^k = \frac{1}{2} \rho \left\{ \left[v_h^1(x_k) - v_h^2(\pi^2(x_k)) \right] n(x_k) - \frac{g_n(x_k)}{\Delta t} \right\}^{+2} S(x_k) \quad (III.32)$$

$$avec \quad v_h^2(\pi^2(x_k)) = (1 - \xi_1 - \xi_2) v_h^2(A_1^2) + \xi_1 v_h^2(A_2^2) + \xi_2 v_h^2(A_3^2)$$

Nous noterons dans la suite $v_{x_k} = v_h^1(x_k)$, $v_{A_i^2} = v_h^2(A_i^2)$.

Par dérivation de $\Phi_{contact}^k$ par rapport à v_{x_k} et aux $v_{A_i^2}$, on obtient la contribution au résidu des conditions de contact. Localement, elles sont données par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{contact}^k}{\partial v_{x_k}} &= \rho S(x_k) \left[h(v_{x_k}) \right]^+ n(x_k) \\ \frac{\partial \Phi_{contact}^k}{\partial v_{A_1^2}} &= -\rho (1 - \xi_1 - \xi_2) S(x_k) \left[h(v_{x_k}) \right]^+ n(x_k) \\ \frac{\partial \Phi_{contact}^k}{\partial v_{A_2^2}} &= -\rho \xi_1 S(x_k) \left[h(v_{x_k}) \right]^+ n(x_k) \\ \frac{\partial \Phi_{contact}^k}{\partial v_{A_3^2}} &= -\rho \xi_2 S(x_k) \left[h(v_{x_k}) \right]^+ n(x_k) \end{aligned} \quad (III.33)$$

Du fait de la présence de la fonction valeur absolue dans l'expression de $\left[h(v_{x_k}) \right]^+$ le résidu n'est pas différentiable lorsque $\left[h(v_{x_k}) \right]^+ = 0$. Une généralisation de l'algorithme de Newton Raphson permet de contourner ce problème de non différentiabilité ([Alart 97]) comme dans le chapitre II.

Une dérivation supplémentaire par rapport à la vitesse nous donne la contribution à la matrice hessienne. En posant :

$$M_3 = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}, n(x_k) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (III.34)$$

localement on exprime la hessienne locale par :

$$\begin{aligned} &\underline{si \ h(v_{x_k}) > 0:} \\ H &= \rho S(x_k) \begin{pmatrix} M_3 & -(1 - \xi_1 - \xi_2) M_3 & -\xi_1 M_3 & -\xi_2 M_3 \\ \cdot & (1 - \xi_1 - \xi_2)^2 M_3 & (1 - \xi_1 - \xi_2) \xi_1 M_3 & (1 - \xi_1 - \xi_2) \xi_2 M_3 \\ \cdot & \cdot & \xi_1^2 M_3 & \xi_1 \xi_2 M_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \xi_2^2 M_3 \end{pmatrix} \\ &\underline{si \ h(v_{x_k}) < 0:} \\ H &= 0 \end{aligned} \quad (III.35)$$

III.5.2. Conditions de frottement entre corps déformable

De même que lors de l'étude des conditions de contact, ici nous nous intéresserons au terme:

$$R_{frott} = \int_{\Gamma_{frott,h}^1} \tau(v_h) \cdot (v_1^* - v_2^*) dS \quad (III.36)$$

En considérant une loi de frottement viscoplastique (le même raisonnement est effectué pour les lois de frottement de Coulomb ou de Tresca), (III.36) devient:

$$\int_{\Gamma_{frott,h}^1} \tau(v_h) \cdot (v_1^* - v_2^*) dS = - \int_{\Gamma_{frott,h}^1} \alpha_f K \|\Delta v_t\|^{p_f-1} \Delta v_t \cdot (v_1^* - v_2^*) dS \quad (III.37)$$

Ce qui nous donne :

$$\text{pour } v_1^* = e_\lambda N_k, x_k \in \partial\Omega_h^1 \quad (III.38)$$

$$R_{frott}^{\lambda k} = - \int_{\Gamma_{frott,h}^1} \alpha_f K \|\Delta v_{ht}\|^{p_f-1} \Delta v_{ht} \cdot e_\lambda N_k dS$$

$$\text{pour } v_2^* = \sum_{\substack{x_k \in \Gamma_{frott,h}^1 \\ \pi(x_k) \in F^2 \text{ et } x_l \in F^2}} e_\lambda N_k, x_l \in \partial\Omega_h^2$$

$$R_{frott}^{\lambda l} = \int_{\Gamma_{frott,h}^1} \alpha_f K \|\Delta v_{ht}\|^{p_f-1} \Delta v_{ht} \cdot \left(\sum_{\substack{x_k \in \Gamma_{frott,h}^1 \\ \pi(x_k) \in F^2 \text{ et } x_l \in F^2}} e_\lambda N_k \right) dS$$

Pour faciliter l'écriture de (III.37) une formulation sous forme de potentiel est effectuée. Elle est donnée par:

$$\Phi_{frott} = \int_{\Gamma_{frott,h}^1} \frac{\alpha_f}{p_f + 1} \|\Delta v_{ht}\|^{p_f+1} dS \quad (III.39)$$

Pour une première approximation l'équation (III.39) est condensée aux nœuds sur $\Gamma_{frott,h}^1$, [Pichelin *et al.* 01], on l'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_{frott} &= \sum_{x_k \in \zeta_{frott,h}^1} \Phi_{frott}^{x_k}, \quad \Phi_{frott}^{x_k} = \frac{\alpha_f}{p_f + 1} \|\Delta v_{ht}(x_k)\|^{p_f+1} S(x_k) \\ \Delta v_t(x_k) &= (v_h^1(x_k) - v_h^2(\pi^2(x_k))) - \left[(v_h^1(x_k) - v_h^2(\pi^2(x_k))) \cdot n(x_k) \right] \\ \zeta_{frott,h}^1 &= \{x_k \in \zeta_h^1, g_n(x_k) = 0\} \end{aligned} \quad (III.40)$$

Dans le paragraphe I.1. nous présentons l'approximation plus naturelle effectuée au point d'intégration.

En dérivant $\Phi_{frott}^{x_k}$ par rapport aux composantes des différentes vitesses aux nœuds on calcule le résidu:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Phi_{frott}^{x_k}}{\partial v_{x_k}^i} &= -\alpha_f K S(x_k) \|\Delta v_{ht}\|^{p_f-1} \Delta v_{ht}^i \\
 \frac{\Phi_{frott}^{x_k}}{\partial v_{A_1}^i} &= \alpha_f K (1 - \xi_1 - \xi_2) S(x_k) \|\Delta v_{ht}\|^{p_f-1} \Delta v_{ht}^i \\
 \frac{\Phi_{frott}^{x_k}}{\partial v_{A_2}^i} &= \alpha_f K \xi_1 S(x_k) \|\Delta v_{ht}\|^{p_f-1} \Delta v_{ht}^i \\
 \frac{\Phi_{frott}^{x_k}}{\partial v_{A_2}^i} &= \alpha_f K \xi_2 S(x_k) \|\Delta v_{ht}\|^{p_f-1} \Delta v_{ht}^i
 \end{aligned}
 \quad i = 1, 3 \quad (III.41)$$

En dérivant une nouvelle les équations (III.41) par rapport aux composantes des vitesses on obtient la contribution locale à la matrice hessienne.

III.6. Vitesse de glissement objective

Nous avons vu que l'analyse du contact entre deux corps déformables consiste à projeter les nœuds de la surface du corps esclave sur une face (triangle) de la discrétisation du corps maître. Si la distance qui sépare ce nœud de son projeté est inférieure à une certaine valeur de tolérance admise alors le contact est considéré. Dans ce qui précède nous n'avons pas pris en compte la variation au cours du temps de la position du projeté. En effet, les deux corps sont tous deux en mouvement par rapport au référentiel utilisé. Les équations de frottement sont écrites sur $\partial\Omega^1$ qui est en mouvement. Considérons donc le mouvement du repère lié à $\partial\Omega^1$ comme la composition d'une rotation et d'une translation. En utilisant la vitesse de glissement donnée, au temps t , par :

$$\Delta v[P(t)] = v_{P(t)} - v_{\pi^2[P(t)]} = \frac{\partial P(t)}{\partial t} - \frac{\partial \pi^2[P(t)]}{\partial t} \quad (III.42)$$

un changement de repère défini par une rotation $R(t)$ et une translation $b(t)$ rend cette vitesse de glissement non objective. En effet, en l'appliquant à un point M sa transformée s'écrit:

$$M'(t) = R(t)M(t) + b(t) \quad (III.43)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par:

$$\dot{M}'(t) = R(t)\dot{M}(t) + \dot{R}(t)M(t) + \dot{b}(t) \quad (III.44)$$

En posant:

$$d(t) = P(t) - \pi^2[P(t)] \quad (III.45)$$

On a :

$$\dot{d}(t) = \Delta v[P(t)] \quad (III.46)$$

Et en appliquant à $P(t)$ et à $\pi^2[P(t)]$ la transformation (III.44) et en faisant la différence on a :

$$\dot{d}'(t) = R(t)\dot{d}(t) + \dot{R}(t)d(t) \neq R(t)\dot{d}(t) \quad (III.47)$$

où $R(t)\dot{d}(t)$ correspond à l'écriture de la différence de vitesse dans le repère en mouvement.

$\dot{d}(t) = \Delta v[P(t)]$, calculée indifféremment dans n'importe quel repère en mouvement (et Ω^1 en particulier), est objective si $d(t) = 0$.

Dans [Wriggers 95] l'auteur présente une correction de la vitesse de glissement pour la rendre objective et qui est donnée par :

$$\{\Delta v[P(t)]\}^o = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \vec{t}_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \vec{t}_2 \quad (III.48)$$

où (ξ_1, ξ_2) sont les coordonnées paramétriques du projeté $\pi^2[P(t)]$, \vec{t}_1 et \vec{t}_2 les vecteurs tangents au point $P(t)$.

Dans la suite nous donnerons l'expression de ces dérivées. Pour ce faire, on pose :

$$\begin{aligned} M(t) &= \pi^2[P(t)] \\ M(t) &= \arg \min_{M'(t) \in \partial\Omega^2} \frac{1}{2} \|P(t) - M'(t)\|^2 \end{aligned} \quad (III.49)$$

ou

$$d(P(t), M(t)) = \|P(t) - M(t)\| = \min_{M'(t) \in \partial\Omega^2} \|P(t) - M'(t)\|$$

Les $M'(t)$ étant sur la surface $\partial\Omega_h^2$ ils appartiennent à des faces de la discrétisation de $\partial\Omega_h^2$. Localement la position du point M' est donnée par les coordonnées barycentriques $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ sur la face $F' = (A_i)_{i=1,3}$ à laquelle il appartient, les A_i étant des sommets du maillages de $\partial\Omega_h^2$. En écrivant l'équation (III.49) avec les coordonnées barycentriques, elle devient :

$$\begin{aligned} M(t) &= \arg \min_{M'(t, \xi_1, \xi_2) \in \partial\Omega^2} \frac{1}{2} \|P(t) - M'(t, \xi_1, \xi_2)\|, \\ M'(t, \xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1(t) - \xi_2(t)) A_1(t) + \xi_1(t) A_2(t) + \xi_2(t) A_3(t) \end{aligned} \quad (III.50)$$

En supposant que $d(t) \neq 0$, la condition de stationnarité pour qu'un minimum local $M(t)$ existe nous donne :

$$\frac{\partial d(t)}{\partial \xi_i} = \frac{P(t) - M(t)}{\|P(t) - M(t)\|} \cdot \frac{\partial M(t, \xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_i} = 0 \quad i=1,2 \quad \forall t \quad (III.51)$$

En notant :

$$\begin{aligned} \vec{t}_1(t) &= \frac{\partial M(t, \xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} = \overline{A_1(t) A_2(t)}, \quad \vec{t}_2(t) = \frac{\partial M(t, \xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} = \overline{A_1(t) A_3(t)} \\ \vec{n}(t) &= - \frac{P(t) - M(t, \xi_1, \xi_2)}{\|P(t) - M(t, \xi_1, \xi_2)\|} = \frac{\overline{P(t) M(t, \xi_1, \xi_2)}}{\|P(t) - M(t, \xi_1, \xi_2)\|} \end{aligned} \quad (III.52)$$

$\vec{n}(t)$ est la normale sortante au nœud $P(t)$, $t_1(t)$ et $t_2(t)$ sont les vecteurs tangents à la surface de la face $F = (A_i)_{i=1,3}$. En les orthonormalisant, les vecteurs tangents s'écrivent :

$$\vec{t}_1(t) = \frac{\overrightarrow{A_1(t)A_2(t)}}{\|\overrightarrow{A_1(t)A_2(t)}\|}, \vec{t}_2(t) = \frac{\overrightarrow{A_1(t)A_3(t)} - \frac{\overrightarrow{A_1(t)A_3(t)} \cdot \overrightarrow{A_1(t)A_2(t)}}{\overrightarrow{A_1(t)A_2(t)}} \overrightarrow{A_1(t)A_2(t)}}{\left\| \overrightarrow{A_1(t)A_3(t)} - \frac{\overrightarrow{A_1(t)A_3(t)} \cdot \overrightarrow{A_1(t)A_2(t)}}{\overrightarrow{A_1(t)A_2(t)}} \overrightarrow{A_1(t)A_2(t)} \right\|} \quad (III.53)$$

La condition de stationnarité (III.51) devient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \cdot \vec{t}_1(t) &= 0 \\ \overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \cdot \vec{t}_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad \forall t \quad (III.54)$$

En dérivant, par rapport au temps, les équations (III.54) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \cdot \vec{t}_1(t) \right\} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left\{ \overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \cdot \vec{t}_2(t) \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (III.55)$$

En notant par :

$$\frac{dP(t)}{dt} = v_P(t); \frac{dM(t, \xi_1, \xi_2)}{dt} = v_M(t) + \vec{t}_1(t) \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \vec{t}_2(t) \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \quad (III.56)$$

les vitesses aux points $P(t)$ et $M(t)$, le développement des dérivés (III.55) nous donne :

$$\begin{aligned} \left\{ v_{P(t)} - v_{M(t)} - \left[\vec{t}_1(t) \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \vec{t}_2(t) \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right] \right\} \cdot \vec{t}_1(t) + \left[\overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \right] \cdot \frac{d}{dt} \left[\vec{t}_1(t) \right] &= 0 \\ \left\{ v_{P(t)} - v_{M(t)} - \left[\vec{t}_1(t) \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \vec{t}_2(t) \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right] \right\} \cdot \vec{t}_2(t) + \left[\overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \right] \cdot \frac{d}{dt} \left[\vec{t}_2(t) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (III.57)$$

$\vec{t}_1(t)$ et $\vec{t}_2(t)$ étant orthonormés (III.57) devient:

$$\begin{aligned} (v_{P(t)} - v_{M(t)}) \cdot \vec{t}_1(t) - \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \left[\overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \right] \cdot \frac{d}{dt} \left[\vec{t}_1(t) \right] &= 0 \\ (v_{P(t)} - v_{M(t)}) \cdot \vec{t}_2(t) - \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \left[\overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \right] \cdot \frac{d}{dt} \left[\vec{t}_2(t) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (III.58)$$

L'expression des $\partial \xi_l / \partial t$ $l = 1, 2$ s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= (v_{P(t)} - v_{M(t)}) \cdot \vec{t}_1(t) + \left[\overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \right] \cdot \frac{d}{dt} \left[\vec{t}_1(t) \right] \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= (v_{P(t)} - v_{M(t)}) \cdot \vec{t}_2(t) + \left[\overrightarrow{P(t)M(t, \xi_1, \xi_2)} \right] \cdot \frac{d}{dt} \left[\vec{t}_2(t) \right] \end{aligned} \quad (III.59)$$

Ce qui permet de calculer la vitesse objective donnée par (III.48).

Est-il nécessaire de prendre en compte une vitesse de glissement objective, plus complexe à programmer ? Pour répondre à cette question, nous effectuons le calcul du forgeage d'un triaxe avec des outils déformables de même rhéologie que le lopin et évaluons la différence des puissances de frottement calculées à partir de $\Delta v(P(t))$ et de $\{\Delta v(P(t))\}^0$.

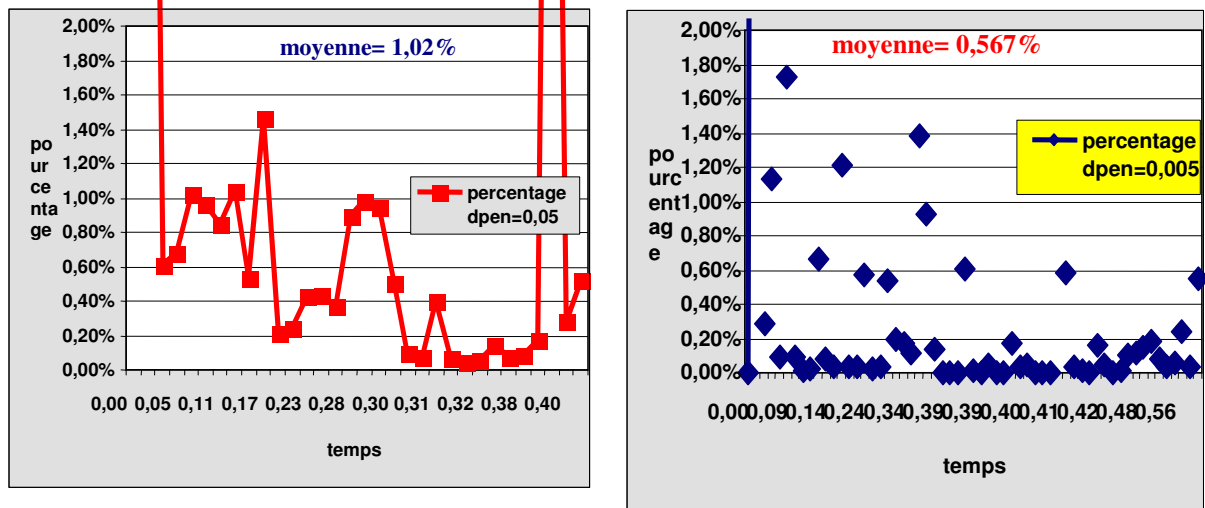


FIG. III.3 – comparaison des vitesses de glissement

Sur les figures FIG. III.3 on note qu'en moyenne la différence relative des puissances de frottement est inférieure à 1%. De plus cette différence dépend du seuil de tolérance $dpen$ de l'analyse du contact. Plus l'analyse du contact est précise moins cette différence est importante. Cet écart est inclus dans la précision de notre traitement du contact. Dans ces résultats nous n'avons pas tenu compte de l'objectivité de la vitesse de glissement dans les équations de contact.

III.7. Frottement aux points de Gauss

Comme nous l'avons vu, le contact est effectué aux nœuds du maillage. En revanche, le calcul des termes de frottement nécessite de connaître la différence de vitesse entre les corps en contact aux points d'intégration. Cela conduit à manipuler les structures de données différentes et également d'effectuer une analyse de contact en ces deux types de points, comme nous le verrons dans la suite. Aussi, certains auteurs [Pichelin *et al.* 00]. Ont-ils proposés une formulation simplifiée : une condensation nodale des termes de frottement. Dans un premier temps nous sommes attachés à évaluer cette approche.

La puissance de frottement (avec une loi viscoplastique) est donnée par :

$$P_{frott} = \int_{\Gamma_{frott}} \alpha_f K \|\Delta v_t\|^{p_f+1} dS \quad (III.60)$$

L'approximation de la puissance de frottement aux nœuds s'écrit :

$$P_{frott}^{x_k} = \sum_{x_k \in \zeta_{h,frott}^1} \alpha_f K \|\Delta v_{ht}(x_k)\|^{p_f+1} S(x_k) \quad (III.61)$$

$S(x_k)$ est donné par la formule (III.27) et celle de $\Delta v_{ht}(x_k)$ par (III.40), $\zeta_{h,frott}^1$ est l'ensemble des nœuds en frottement.

La formulation aux points de Gauss est donnée par :

$$P_{frott}^{int} = \sum_{F^1 \in \Gamma_{frott,h}^1} \alpha_f K \sum_{p_{int} \in F^1} \left[\|\Delta v_t(p_{int})\|^{p_f+1} S(p_{int}) \right] \quad (III.62)$$

Où $\Delta v_t(p_{int})$ est la vitesse de glissement estimée au point d'intégration p_{int} et $S(p_{int})$ le coefficient de pondération attaché au point d'intégration multiplié par le jacobien de la transformation.

Pour tester les deux formulations, nous avons considéré que les paramètres de frottement sont constants au cours de la simulation. De ce fait nous allons estimer la puissance de frottement en considérant la vitesse de glissement aux points d'intégration comme étant une interpolation de celle calculée aux nœuds. Pratiquement, l'assemblage et la résolution du problème sont effectués avec une formulation condensée aux nœuds. Et une fois que les valeurs des vitesses sont connues, une interpolation aux points d'intégration est calculée et de-là la puissance de frottement en ces points.

III.7.1. Éléments de frottement

Pour calculer la vitesse de glissement $\Delta v_t(p_{int})$ au point d'intégration p_{int} , connaissant la vitesse sur la surface $\Gamma_{frott,h}^1$ du corps esclave, on a besoin de celle sur le corps maître. En première analyse, il faudrait projeter le point d'intégration p_{int} sur $\partial\Omega_h^2$ pour en déduire la vitesse sur le corps maître, ce qui serait cohérent avec une formulation intégrale du contact. Mais l'analyse de contact est faite aux nœuds et le frottement doit être calculé de manière cohérente avec celle-ci.

Soit $F^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1) \in \partial\mathfrak{F}_h^1$ un triangle du corps esclave. Nous considérons que tous les nœuds de F^1 sont en contact et donc que la face F^1 frotte. Nous désirons estimer la vitesse de glissement aux trois points de Gauss $(p_{int}^j)_{j=1,3}$ de F^1 . Soit $x_i^2 = \pi^2(x_i^1)$ les projetés des nœuds de F^1 sur la surface du corps maître. Chaque projeté se trouve sur un triangle du corps maître. Nous poserons :

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \pi^2(x_1^1) \in F_1^2 = (A_1^1, A_2^1, A_3^1) \\ x_2^2 &= \pi^2(x_2^1) \in F_2^2 = (A_1^2, A_2^2, A_3^2) \\ x_3^2 &= \pi^2(x_3^1) \in F_3^2 = (A_1^3, A_2^3, A_3^3) \end{aligned} \quad (III.63)$$

Les triangles $(F_i^2)_{i=1,3} \in \partial\mathfrak{F}_h^2$ sont considérés comme distincts mais ils peuvent également être confondus. Ce cas de redondance est facilement traité dans la pratique au niveau de la programmation. Au niveau de la structure informatique l'ensemble défini par :

$$elt_{frott} = \{(x_i^1, F_i^2)_i, i=1,3\} \quad (III.64)$$

est dénommé élément de frottement (voir FIG. III.4).

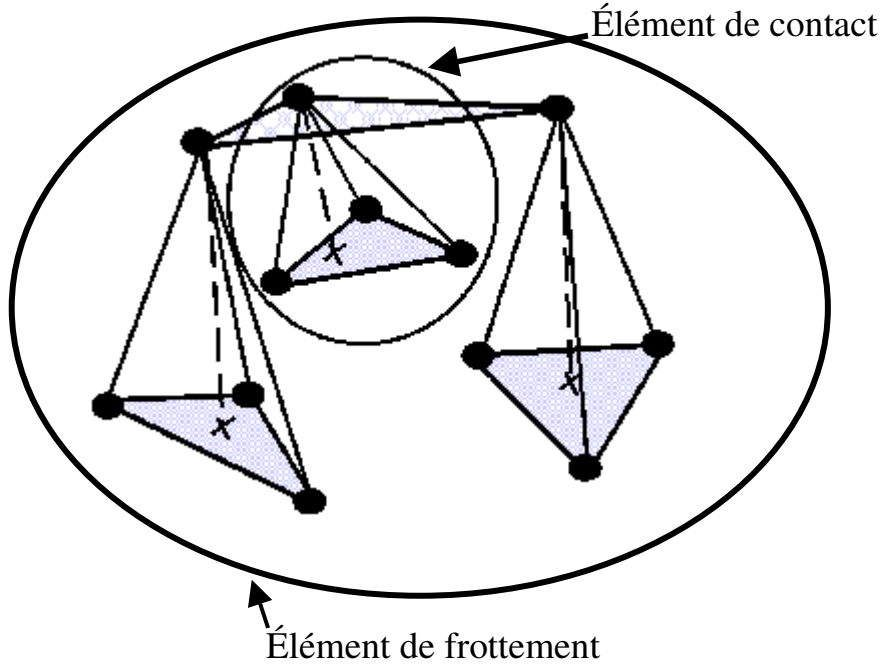


FIG. III.4 – élément de frottement

Nous remarquons que les éléments de frottement sont une réunion d'éléments fictifs de contact et comme ces derniers ils nous permettent d'effectuer plus aisément la résolution globale du problème de couplage mécanique entre les corps déformables.

III.7.2. Vitesse tangentielle aux points d'intégration

En utilisant les coordonnées barycentrique (notations légèrement différentes de celles utilisées plus haut), nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \xi_1^1 A_1^1 + \xi_2^1 A_2^1 + \xi_3^1 A_3^1; \xi_1^1 = 1 - \xi_3^1 - \xi_2^1 \\ x_2^2 &= \xi_1^2 A_1^2 + \xi_2^2 A_2^2 + \xi_3^2 A_3^2; \xi_1^2 = 1 - \xi_3^2 - \xi_2^2 \\ x_3^2 &= \xi_1^3 A_1^3 + \xi_2^3 A_2^3 + \xi_3^3 A_3^3; \xi_1^3 = 1 - \xi_3^3 - \xi_2^3 \end{aligned} \quad (III.65)$$

De même la vitesse aux nœuds $(x_i^2)_{i=1,3}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} v_{x_1^2} &= \xi_1^1 v_{A_1^1} + \xi_2^1 v_{A_2^1} + \xi_3^1 v_{A_3^1} \\ v_{x_2^2} &= \xi_1^2 v_{A_1^2} + \xi_2^2 v_{A_2^2} + \xi_3^2 v_{A_3^2} \\ v_{x_3^2} &= \xi_1^3 v_{A_1^3} + \xi_2^3 v_{A_2^3} + \xi_3^3 v_{A_3^3} \end{aligned} \quad (III.66)$$

La vitesse de glissement au point de Gauss p_{int}^j appartenant aux triangles $(F_i^2)_{i=1,3}$ est donnée par :

$$\Delta v(p_{\text{int}}^j) = \sum_{i=1}^3 (v_{x_i^j} - v_{x_i^2}) N^{p_i^1}(p_{\text{int}}^j) \quad (III.67)$$

Où les $N_i^{p_l}(p_{int}^j)$ sont les valeurs des fonctions de formes linéaires, associées aux nœuds x_i^1 , appliquées au point de Gauss p_{int}^j .

En posant :

$$\Pi_{\partial\Omega^2} \left[v(p_{int}^j) \right] = \sum_{i=1}^3 v_{x_i^2} N_{x_i^1}(p_{int}^j) \quad (III.68)$$

l'équation (III.67) peut être interprétée comme une projection des points de Gauss (qui sont sur la surface du corps esclave) sur la surface du corps maître. En effet, la vitesse de glissement de chaque point de Gauss p_{int}^j est obtenue en considérant que la vitesse de leur vis à vis sur le corps maître (III.68) est une interpolation de la vitesse des projetés des nœuds $(x_i^1)_{i=1,3}$ en utilisant les fonctions de forme définies à partir de ces derniers (FIG. III.5).

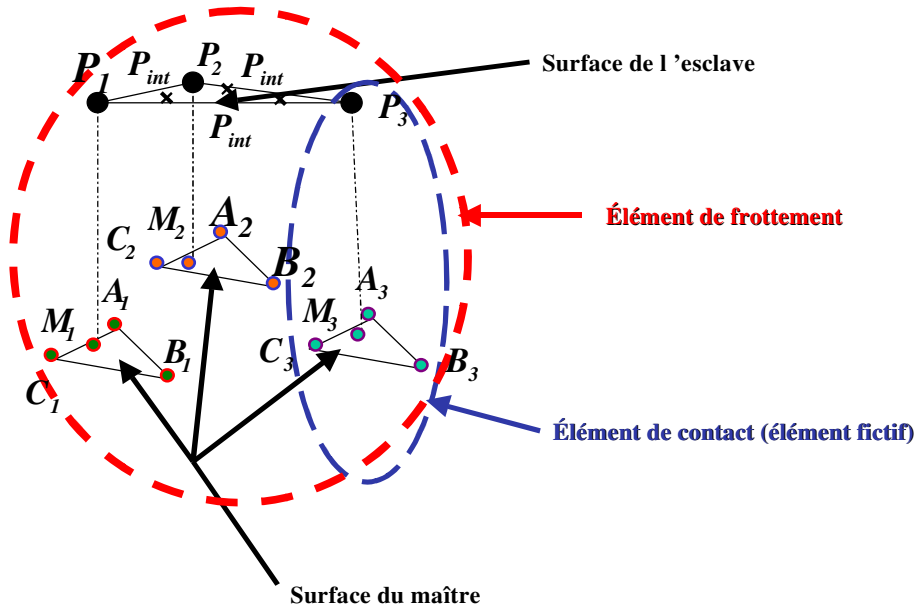


FIG. III.5 – interpolation des vis à vis des points d'intégration

Une fois que la vitesse de glissement aux points d'intégration est calculée, nous pouvons estimer la puissance de frottement obtenue à partir de ces derniers et effectuer la comparaison avec la puissance de frottement obtenue par une formulation approchée aux nœuds.

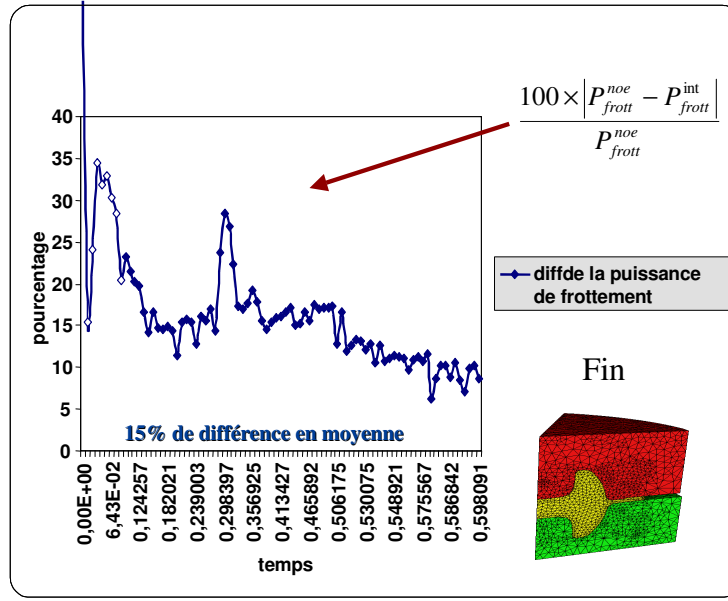


FIG. III.6 – estimation de la différence de puissance de frottement entre une formulation approchée aux nœuds et une formulation cohérente aux points de Gauss

Sur la figure FIG. III.6 nous présentons la comparaison des deux puissances de frottement pour une simulation de forgeage d'un triaxe. Nous observons qu'il y a en moyenne une différence relative de 15% entre les deux formulations. L'approximation du frottement condensé aux nœuds n'est donc pas acceptable, ce qui nous a incité à implémenter effectivement la formulation du frottement aux points d'intégration, malgré sa plus grande complexité et l'augmentation de la largeur de bande locale provoquée par l'apparition des « éléments de frottement ».

III.7.3. Les formules du gradient et du hessien aux points de Gauss

Comme nous l'avons fait pour le calcul du gradient et du hessien dans le cas d'une formulation aux nœuds, nous allons utiliser une formulation en potentiel pour présenter le calcul du gradient et du hessien. Le potentiel de frottement s'écrit :

$$\Phi_{frott}^{int} = \int_{\Gamma_{frott,h}^1} \frac{\alpha_f K}{p_f + 1} \|\Delta v_{ht}\|^{p_f+1} dS \quad (III.69)$$

En l'écrivant aux points de Gauss l'équation (III.68) devient :

$$\Phi_{frott}^{int} = \sum_{F^1 \in \Gamma_{frott,h}^1} \int_{F^1} \frac{\alpha_f K}{p_f + 1} \|\Delta v_{ht}\|^{p_f+1} dS \approx \sum_{F^1 \in \Gamma_{frott,h}^1} \sum_{p_{int}^j \in F^1} \frac{\alpha_f K}{p_f + 1} \|\Delta v_{ht}(p_{int}^j)\|^{p_f+1} S(p_{int}^j) \quad (III.70)$$

Avec : $S(p_{int}^j) = w_j \times surface(F^1)$, w_j étant le poids associé au point de Gauss p_{int}^j et $\Delta v_{ht}(p_{int}^j)$ donnée par :

$$\Delta v_{ht}(p_{int}^j) = \Delta v_h(p_{int}^j) - [\Delta v_h(p_{int}^j) \cdot n(p_{int}^j)] n(p_{int}^j) \quad (III.71)$$

$n(p_{\text{int}}^j)$ la normale sortante au point de Gauss p_{int}^j qui est par ailleurs identique à la normale sortante à la face F^1 pour les éléments linéaires.

En posant :

$$\Phi(p_{\text{int}}^j) = \frac{\alpha_f K}{p_f + 1} \|\Delta v_{ht}(p_{\text{int}}^j)\| S(p_{\text{int}}^j) \quad (\text{III.72})$$

La contribution locale au gradient est obtenue en dérivant par rapport aux vitesses le potentiel (III.72) et celle à la matrice hessienne est obtenue en faisant une double dérivation

III.8. Formulation pseudo-symétrique

Pour traiter symétriquement l'écriture des conditions de contact, nous nous sommes inspirés des travaux effectués dans [El-Abbasi et al. 01]. Pour ces derniers le point crucial est de pouvoir évaluer le plus précisément possible la distance de contact entre les deux corps (III.7). Pour ce faire, en utilisant les paramètres de Lagrange, l'intégrale de la contribution de la condition de contact unilatéral dans les équations d'équilibre s'écrit :

$$\Lambda = \int_{\Gamma_c} \lambda h(v) dS \quad (\text{III.73})$$

Les discrétisations $\Gamma_{c,h}^1$, $\Gamma_{c,h}^2$ de la surface de contact Γ_c , respectivement sur les domaines Ω^1 et Ω^2 , n'étant pas les mêmes, il faut choisir une surface discrète d'intégration de Λ . On n'obtient pas le même résultat si on intègre sur $\Gamma_{c,h}^1$ ou $\Gamma_{c,h}^2$ (III.75). Et si on intègre sur la réunion des deux (III.74), le problème devient sur-contraint [Chenot et al. 98], [El-Abbasi et al. 01]. Nous sommes donc obligés d'utiliser la technique du maître/esclave. Avec un raccordement ponctuel tel que nous venons de le présenter, la précision est moindre (chute de la vitesse de convergence de la méthode éléments finis) [El-Abbasi et al. 01], [Hild 98].

$$\text{Formulation symétrique: } \Lambda_h^{\text{sym}} = \int_{\Gamma_{c,h}^1} \lambda_h^1 h(v_h^1) dS + \int_{\Gamma_{c,h}^2} \lambda_h^2 h(v_h^2) dS \quad (\text{III.74})$$

$$\text{Formulation maître/esclave: } \Lambda_h^{m/e} = \int_{\Gamma_{c,h}^1} \lambda_h^1 h(v_h^1) dS \text{ ou } \Lambda_h^{m/e} = \int_{\Gamma_{c,h}^2} \lambda_h^2 h(v_h^2) dS \quad (\text{III.75})$$

D'après [El-Abbasi et al. 01] pour que la formulation soit satisfaisante, à la fois en termes de convergence et de stabilité, il faut qu'elle puisse transmettre exactement un champ de contrainte constant à travers l'interface. Et pour ce faire, il suffit que Λ soit évalué de la façon la plus exacte possible pour un chargement constant $\bar{\lambda}$. Ceci est obtenu en calculant Λ sur la réunion des surfaces discrétisées

$$\Lambda_h^{\text{sym}} = \Lambda_h^{m/e} = \bar{\lambda} \int_{\Gamma_{\text{sym}}} h(v) dS \quad (\text{III.76})$$

$$\Gamma_{\text{sym}} = \Gamma_{c,h}^1 \cup \pi^1(\Gamma_{c,h}^2) \text{ ou}$$

$$\Gamma_{\text{sym}} = \Gamma_{c,h}^2 \cup \pi^2(\Gamma_{c,h}^1)$$

Γ_{sym} est la réunion des discrétisations des deux surfaces de contact.

Et la formulation maître/esclave qui en résulte s'écrit:

$$\Lambda_h^{m/e} = \int_{\Gamma_{sym}} \lambda_h^1 h(v) dS \quad (III.77)$$

Du point de vue pratique, cette formulation nécessite donc de considérer deux maillages celui de Γ_{sym} pour intégrer l'équation (III.77) et celui de la surface de contact du corps esclave pour interpoler le multiplicateur de Lagrange λ^1 sur Γ_{sym} . En 2D, il est relativement aisé de construire le maillage de Γ_{sym} [El-Abbasi *et al.* 01]. En 3D, cette construction nécessite de mailler une surface gauche fort complexe, ce que nous tenons à éviter. Par ailleurs, nous utilisons une formulation nodale du contact (un raccord ponctuel) et non intégré comme dans [El-Abbasi *et al.* 01]. Ces deux points nous entraînent vers une formulation différente du contact.

Selon le choix du paramètre de Lagrange, ce contact nodal peut s'écrire de deux manières:

$$\text{Contraintes normales de contact: } \Lambda^{nod} = \sum_{x_k \in \Gamma_{sym}} \lambda_k h(v_h(x_k)) S(x_k) \quad (III.78)$$

$$\text{Forces normales de contact: } \Lambda^{nod} = \sum_{x_k \in \Gamma_{sym}} \lambda_k h(v_h(x_k)) \quad (III.79)$$

$S(x_k)$ représente la surface associée au nœud x_k . Avec (III.78), les valeurs des multiplicateurs de Lagrange sont homogénéisées par rapport à la taille de maille, ce qui est intéressant lorsque nous utilisons une formulation pénalisée. En revanche, avec l'écriture (III.79), nous constatons que la géométrie de l'interface n'intervient qu'aux nœuds. Il est alors aisé de considérer la réunion d'un ensemble de point de Γ_{sym} et avec une formulation nodale, (III.77) devient:

$$\Lambda_{m/e}^{nod} = \sum_{x_k \in \Gamma_{sym}} \lambda^1(x_k) h(v_h(x_k)) \quad (III.80)$$

$$\text{ou encore } \Lambda_{m/e}^{nod} = \sum_{x_k \in \zeta_h^1} \lambda^1(x_k) h(v_h^1(x_k)) + \sum_{x_l \in \zeta_h^2} \lambda^1(\pi^1(x_l)) h(v_h^2(x_l))$$

Cette formulation nécessite d'interpoler λ^1 aux nœuds de ζ_h^2 , ce qui pose problème avec la formulation du contact nodal. Nous choisissons une interpolation avec les fonctions de formes isoparamétriques.

$$\Lambda_{m/e}^{nod} = \sum_{x_k \in \zeta_h^1} \lambda^1(x_k) h(v_h^1(x_k)) + \sum_{x_l \in \zeta_h^2} \left[\sum_{x_m \in F^1 \supset \pi^1(x_l)} (\lambda_{x_m}^1 N_{x_m}^1(\pi^1(x_l))) \right] h(v_h^2(x_l)) \quad (III.81)$$

Nous pouvons alors en déduire la formulation pénalisée en exprimant la fonctionnelle de pénalisation du contact:

$$\Phi_{m/e}^{nod} = \frac{1}{2} \sum_{x_k \in \zeta_h^1} \left[h(v_h^1(x_k)) + \sum_{\substack{x_l \in \zeta_h^2 \\ \pi^1(x_l) \in F^1 \\ x_m \in F^1}} N_{x_m}^1(\pi^1(x_l)) h(v_h^2(x_l)) \right]^{+2} \quad (III.82)$$

On remarque que l'on n'augmente pas le nombre de conditions de contact vis-à-vis de la formulation précédente, mais que les deux surfaces jouent un rôle presque symétrique.

Sur la figure FIG. III.7 nous présentons les premiers tests effectués. Il s'agit d'un écrasement de deux cubes de rhéologies identiques entre deux tas plats. Avec des maillages coïncidents, le champ des vitesses suivant z est parfaitement continu à l'interface. Si on raffine le maillage de l'esclave, les résultats sont toujours satisfaisants. Par contre, si on prend le maître plus fin, les résultats sont très mauvais étant donné que de nombreux nœuds du maître ne reçoivent aucun chargement de contact: tout se passe comme s'ils appartenaient à la surface libre; le champ des vitesses sur l'interface est chaotique. Avec la formulation pseudo-symétrique, on retrouve des résultats semblables, que le maître ou l'esclave soit raffiné.

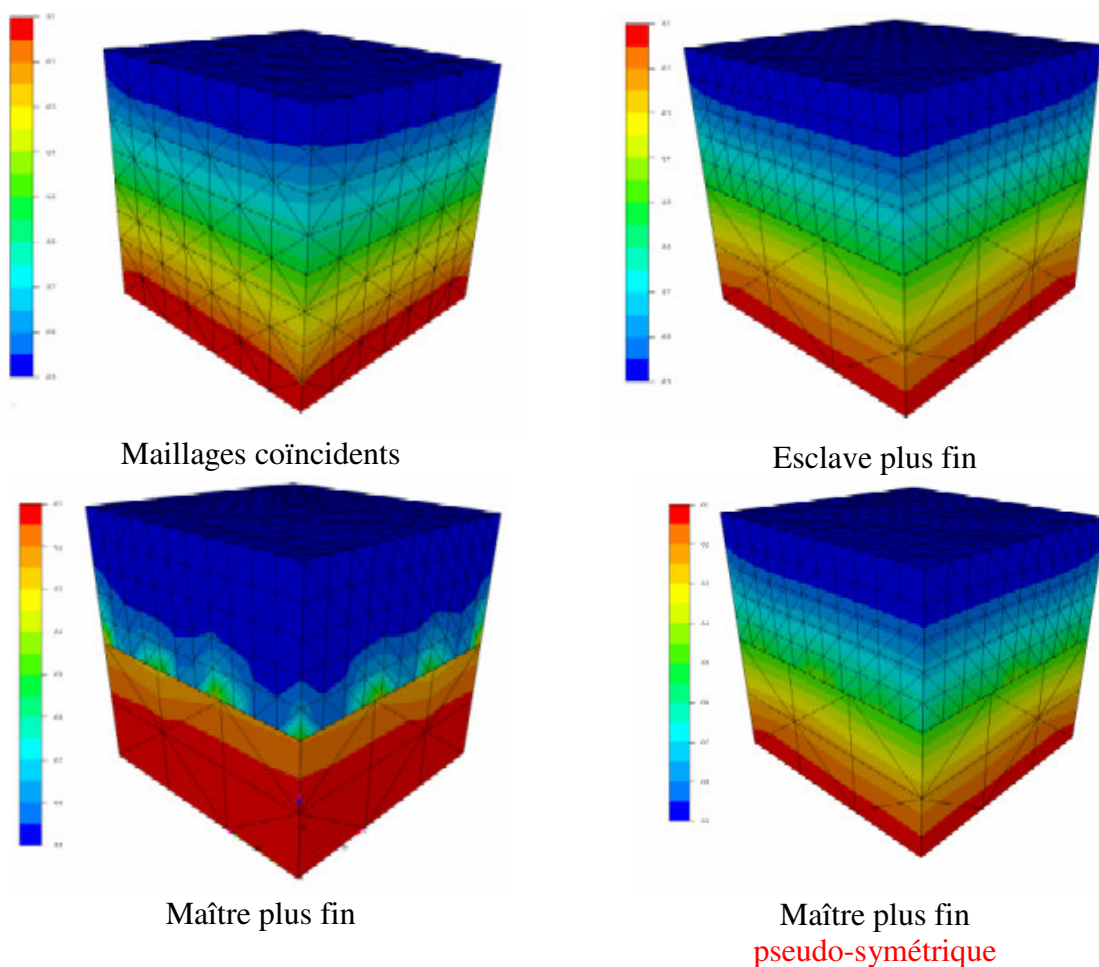


FIG. III.7 – formulation pseudo-symétrique

III.9. Repli de matière

Lors de la simulation des procédés de forgeage, il arrive parfois qu'une partie de la pièce rentre en contact avec une autre partie de cette même pièce. On a ainsi l'apparition d'un repli de matière. Au niveau industriel, il est important de pouvoir prédire si ce repli de matière

perdure et si, à la fin du forgeage il se localise dans une bavure ou s'il demeure dans une partie utile de la pièce forgée (non usinée).

III.9.1. Détection géométrique de l'auto-contact

De même que pour le contact entre corps déformables, la recherche de l'auto-contact se base sur le même algorithme que pour le contact entre un corps rigide et un corps déformable. Et comme dans le cas des corps déformables, on duplique la structure surfacique de la pièce pour effectuer cette analyse de contact. Ainsi on a la même analyse de contact pour toutes les trois situations : contact entre un corps déformable et un corps rigide, contact entre deux corps déformables, contact entre deux parties d'un même corps. Plusieurs manières de faire sont possibles, mais nous avons souhaité développer un algorithme qui puisse aisément fonctionner en parallèle, c'est-à-dire qui n'utilise que des informations disponibles localement dans une version parallèle du code.

Une première analyse est effectuée pour chercher les nœuds qui sont potentiellement en situation de repli.

Soit Ω_h la discrétisation du corps déformable, $\partial\Omega_h$ la discrétisation de sa surface en triangles, $\partial\mathfrak{X}_h$ sa triangulation. Soit $F \in \partial\Gamma_h$, la détection des nœuds P de F pouvant être potentiellement en contact se fait comme suit :

- Pour tout $P \in F$, on recherche l'intersection avec la demi-droite D_P issue de P et menée par la normale \vec{n}_F au triangle F . Cette recherche est uniquement basée sur la direction et le sens de \vec{n}_F et donc plusieurs triangles de $\partial\Gamma_h$ peuvent avoir une intersection avec D_P .

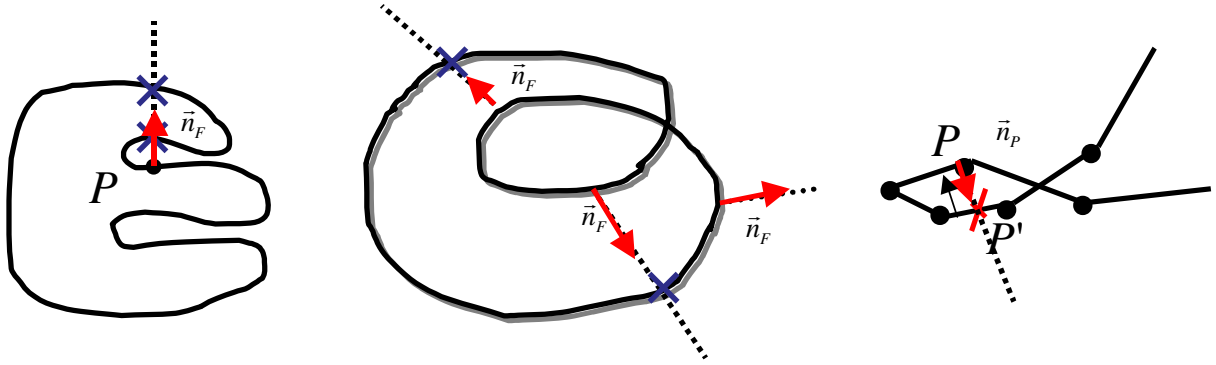


FIG. III.8 – détection de l'auto-contact

- Parmi ces triangles F' , sont retenus ceux qui vérifient le critère :

$$n_F \cdot n_{F'} \leq -\frac{1}{2} \quad (III.83)$$

Le critère donné par l'équation (III.83) exprime le fait que l'angle défini par les deux normales n_F et $n_{F'}$ est compris entre 120° et 240° .

- Si l'ensemble des triangles satisfaisant les critères ci-dessus est non vide alors le nœud P est potentiellement en situation de repli.

Une fois que les nœuds potentiellement en auto-contact sont détectés, on effectue une analyse de contact habituelle (entre corps déformables). C'est à dire que l'on utilise la même définition de la normale (I.1.) et non celle ci-dessus. On note ζ_h l'ensemble des nœuds en repli.

III.9.2. Formulation esclave/esclave

Pour effectuer le traitement du repli un terme supplémentaire est ajouté à l'équation (III.26). Contrairement au contact entre corps déformables, il est difficile de déterminer une partie maître et une partie esclave sur un même corps. Pour effectuer le traitement du repli, la zone de repli Γ^{repli} sera définie par tous les nœuds de ζ_h . Cette formulation esclave/esclave est sur-contrainte, ce que nous nous sommes efforcés d'éviter jusqu'ici. Cependant, nous pouvons considérer qu'un repli de matière peut, soit être évacué en bavure, soit demeurer dans une partie utile de la pièce forgée. Dans le second cas, la gamme de forgeage doit être considérée de nouveau, la pièce étant rebutée. Dans le premier cas, l'écoulement de matière est localement rigidifié dans une zone qui est ensuite évacuée, ce qui minimise son influence espérons-nous sur l'écoulement dans la partie utile de la pièce.

Une formulation maître/esclave peut être développée. Elle nécessite de mettre au point un algorithme de coloriage des surfaces qui s'interpénètrent, ce qui est un peu délicat en 3D mais pas du tout impossible.

Soit $P \in \zeta_h$ en auto-contact, $F = (A_i)_{i=1,3}$ le triangle de $\partial \mathfrak{F}_h$ où se projette le nœud P .

On pose :

$$\begin{aligned} M &= \Pi_{\partial \Omega_h}(P) \\ v_M &= (1 - \xi_1 - \xi_2) A_1 + \xi_1 A_2 + \xi_2 A_3 \\ h(v_p) &= (v_p - v_M) \cdot n(P) - \frac{g_n(P)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (III.84)$$

Où $n(P)$ et $g_n(P)$ sont respectivement donnés par les équations (III.24) et (III.23). De même que dans le cas du contact entre corps déformables, pour écrire les différentes contributions au gradient et au hessien, nous pouvons utiliser une formulation par potentiel. La discrétisation du potentiel s'exprime par:

$$\begin{aligned} \Phi_{repli} &= \sum_{P \in \Gamma^{repli}} \Phi_{repli}^P \\ \Phi_{repli}^P &= \frac{1}{2} \rho \{ [h(v_p)] \}^{+2} S(P) \\ \frac{\partial \Phi_{repli}}{\partial v} &= R_{repli} \end{aligned} \quad (III.85)$$

L'expression des contributions localement au gradient et à la matrice hessienne sont identiques à celle donnée dans les équations (III.33) (III.35).

Sur la figure FIG. III.9 un cas de simulation d'un cube (avec une entaille) entre deux tas plats est représenté. Cette simulation montre la faisabilité et la robustesse de notre algorithme de détection de l'auto-contact.

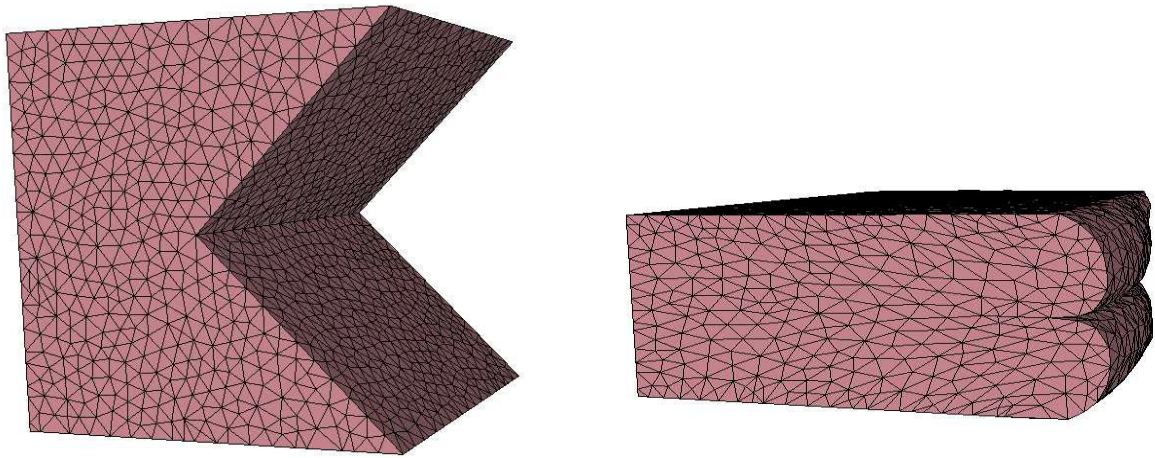


FIG. III.9 – repli d'un cube avec une entaille

Chapitre IV

Résolution parallèle

La simulation des procédés de mise forme des matériaux en trois dimensions nécessite des moyens de calculs puissants. Des méthodes numériques de résolution, adaptées aux calculateurs parallèles, ont été développées pour accélérer le calcul. Dans le logiciel FORGE3[®] une méthode de résolution utilise l'approche dite S.P.M.D. (Single Program Multiple Data ou un Seul programme pour de Multiples Données). Nous avons conservé cette stratégie pour paralléliser le problème multi-corps. Cette méthode consiste à partitionner le maillage éléments finis du problème discret en plusieurs sous-domaines, puis à lancer le même code (semblable au code séquentiel mais auquel on rajoute des procédures d'actualisation des données communes entre sous-domaines), sur chacun des processeurs d'une machine parallèle.

Dans la suite, nous présenterons tout d'abord la stratégie S.P.M.D. appliquée à la résolution du problème entre un corps déformable et des outils rigides. Puis nous présenterons une extension de la résolution de ce problème au cas de plusieurs corps déformables.

IV.1. Stratégie de parallélisation S.P.M.D.

La parallélisation de la résolution des problèmes de grandes tailles est effectuée en combinant une méthode de partitionnement avec l'algorithme itératif de résolution non linéaire. En adoptant la stratégie de parallélisation S.P.M.D., la parallélisation complète du logiciel FORGE3[®] (forgeage d'un corps déformable avec des outils rigides) consiste à :

- décomposer le maillage du corps déformable en plusieurs sous-domaines de dimensions équivalentes et minimisant le nombre de nœuds de leurs intersections (le nombre de sous-domaines étant celui du nombre de processeurs).

- exécuter sur chaque processeur la version complète du logiciel restreinte au sous-domaine qui s'y trouve.

- comme conditions aux limites sur chacun des sous-domaines prendre les conditions aux limites du problème global. Les conditions de contact et de frottement sont considérées comme des conditions aux limites. Les maillages des outils rigides ne sont pas partitionnés car la surface de contact est une inconnue du problème. La structure des outils rigides et les paramètres définissant leur pilotage sont donc dupliqués sur chaque processeur. L'analyse de contact se fait localement par tous et l'ensemble des outils rigides est "visible" par tous sans la nécessité d'effectuer des communications.

La structure de données de chaque sous-domaine est complétée par la description de ses interfaces avec les sous-domaines voisins, de manière à prendre en compte leurs contributions au cours de la simulation. La combinaison des différents calculs effectués sur chaque processeur permet de réaliser la résolution globale du système (FIG. IV.1).

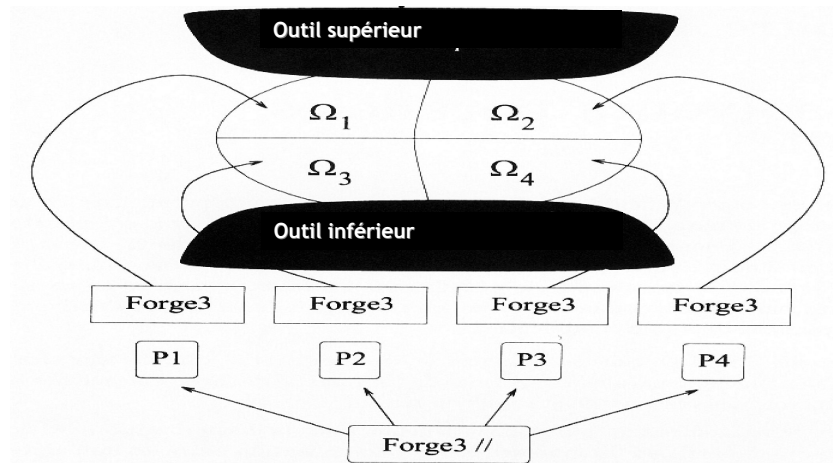


FIG. IV.1 – Stratégie S.P.M.D du code FORGE3[®] (corps déformable et outils rigides)

IV.1.1. Le solveur parallèle

L'assemblage, comme la résolution itérative du système linéaire (méthode du résidu minimal préconditionnée) vue dans le chapitre II, peuvent se décomposer localement sur chaque sous-domaine. Les solutions aux interfaces s'obtiennent en effectuant la somme des contributions locales obtenues sur les sous-domaines.

Les contributions éléments finis pour résoudre le problème global n'apparaissent que lors de la résolution du système linéaire global. Pour mettre en œuvre cette méthode, on utilise le fait que des produits matrice-vecteur et des produits scalaires s'écrivent (en séquentiel):

$$Ax = b$$

$$xy = \sum_{i=1}^{Nbnoe} x^i . y^i \quad (IV.1)$$

avec x^i la restriction du vecteur global x au nœud i (de dimension quatre correspondant aux degrés de liberté à d'un nœud: vitesse et pression) et $Nbnoe$ le nombre de nœuds du maillage global.

Soit Ω le domaine discrétisé du corps, on considère une partition du maillage de Ω en $Nproc$ parties ($Nproc$ étant le nombre de processeurs du calcul parallèle) :

$$\Omega = \bigcup_{p=1}^{Nproc} \Omega^p \quad (IV.2)$$

$$\Gamma^{pl} = \Omega^p \cap \Omega^l \quad p \neq l$$

Γ^{pl} est l'interface entre les sous-domaines Ω^p et Ω^l .

Sur chaque processeur correspondant au sous-domaine Ω^p , on construit par assemblage la matrice de raideur locale A^p :

$$A = \sum_{p=1}^{Nproc} \hat{A}^p \quad (IV.3)$$

où la matrice \hat{A}^p est identique à la matrice A^p mais renumérotée globalement et complétée par des zéros pour avoir la même dimension que la matrice A . On note x^p la restriction du vecteur global x au sous-domaine Ω^p :

$$x^p = x|_{\Omega^p} \quad (IV.4)$$

Dans la pratique, sur chaque sous-domaine, on ne calcule que des contributions locales aux vecteurs globaux donnés par:

$$(Ax)|_{\Omega^p} = b^p$$

$$b^p = b|_{\Omega^p} \quad (IV.5)$$

Pour ce faire, le produit matrice vecteur s'effectue indépendamment sur chaque sous-domaine et s'écrit :

$$B^p = A^p x^p, \quad p = 1, Nproc \quad (IV.6)$$

Le vecteur global résultant du produit matrice-vecteur s'écrit par ajout des différentes contributions de chaque sous-domaine :

$$b = \sum_{p=1}^{Nproc} \hat{B}^p \quad (IV.7)$$

où \hat{B}^p est identique à B^p mais renuméroté globalement et complété par des zéros pour avoir la même dimension que le vecteur global b .

On introduit ν^p l'ensemble des numéros des sous-domaines ayant une interface non vide avec le sous-domaine Ω^p :

$$\nu^p = \{l / \Gamma^{pl} = \Omega^p \cap \Omega^l\} \neq \emptyset \quad (IV.8)$$

b^p s'écrit alors comme la somme du vecteur local B^p et des contributions aux interfaces de ses sous-domaines voisins :

$$b^p = B^p + \sum_{l \in \mathcal{V}^p} B^{lp} \quad (IV.9)$$

où B^{lp} est la valeur du vecteur B^l aux nœuds de l'interface Γ^{pl} du domaine Ω^p renumérotée et complétée par des zéros pour qu'il ait la dimension de b^p .

Pour calculer le produit scalaire, on simplifie l'écriture des équations en identifiant le maillage de Ω par la numérotation des nœuds qui le constitue, pour cela on pose :

$$\begin{aligned} M(\Omega) &= \{1, \dots, nbnoe\} \\ M(\Omega^p) &= \{1, \dots, nbnoe(p)\} \end{aligned} \quad (IV.10)$$

où $nbnoe(p)$ est le nombre de nœuds du maillage du sous-domaine Ω^p . Les numérotations sont locales à chaque sous-domaine.

On définit :

$$\begin{aligned} loc^p : M(\Omega) &\rightarrow M(\Omega^p) \\ i &\rightarrow j = loc^p(i) \end{aligned} \quad (IV.11)$$

j est le numéro local du nœud i (numéro global) dans le sous-domaine Ω^p . Par convention $j=0$ si le nœud de numéro global i n'appartient pas au sous-domaine Ω .

Afin de pondérer les nœuds d'interface dans le produit scalaire effectué localement sur chaque sous-domaine, on définit :

$$\alpha_j^p = \frac{1}{card(proc(i))}, \quad j = loc^p(i); j \neq 0 \quad (IV.12)$$

où $card(proc(i))$ est le cardinal de l'ensemble des sous-domaines contenant le nœud i . Ainsi sur chaque processeur on peut calculer la contribution locale au produit scalaire par :

$$x^p \cdot y^p = \sum_{j=1}^{nbnoe(p)} \alpha_j^p x_j^p \cdot y_j^p \quad (IV.13)$$

Le produit scalaire s'écrit alors comme la somme des produits scalaires locaux [Marie 97]:

$$x \cdot y = \sum_{p=1}^{Nbproc} x^p \cdot y^p \quad (IV.14)$$

IV.1.2. Méthode de partitionnement de maillage

L'opération de partitionnement est très importante pour la parallélisation. Elle doit, en plus de minimiser la taille des interfaces entre les sous-domaines, diviser le maillage du domaine en sous-domaines ayant environ le même nombre d'éléments. Comme information, le partitionneur utilise uniquement la topologie du maillage c'est à dire la connexion des éléments tétraédriques entre eux.

Le partitionnement dans FORGE3[®] s'effectue en deux étapes:

- La première étape, dite algorithmique "glouton", consiste à déterminer N_{proc} éléments aussi distants que possible les uns des autres. Chacun de ces éléments constitue le centre d'un sous-domaine de la partition. Une couleur est attribuée à chacun de ces éléments (une couleur représente un processeur). Pour chaque élément colorié, on propage sa couleur aux éléments voisins non coloriés. Une fois que tous les éléments sont coloriés, on obtient le premier partitionnement qui sera ensuite amélioré.

- La deuxième étape consiste à améliorer ce partitionnement. On effectue une minimisation du nombre de nœuds aux interfaces (donc des communications) par un changement local de couleur. Cette procédure de minimisation s'effectue en revisitant la couleur de chaque élément du maillage. Pour ce faire, on utilise l'algorithme suivant: on visite un élément, on optimise les communications locales en modifiant ou non sa couleur, ensuite on choisit un autre élément non encore visité et ne faisant pas partie des éléments voisins (de même couleur) d'un élément déjà visité. On itère jusqu'à ce que tous les groupes d'éléments aient été visités. L'optimisation des communications locales est effectuée en considérant que chaque élément (un tétraèdre dans notre cas) a au plus quatre éléments voisins, de une à quatre couleurs possibles. Le changement de couleur est effectué en optimisant une fonction coût prenant en compte le nombre d'éléments par couleurs ou charge des processeurs et le nombre de faces partagées par des éléments de couleurs différentes (FIG. IV.2) (voir [Digonnet 01] et [Marie 97]).

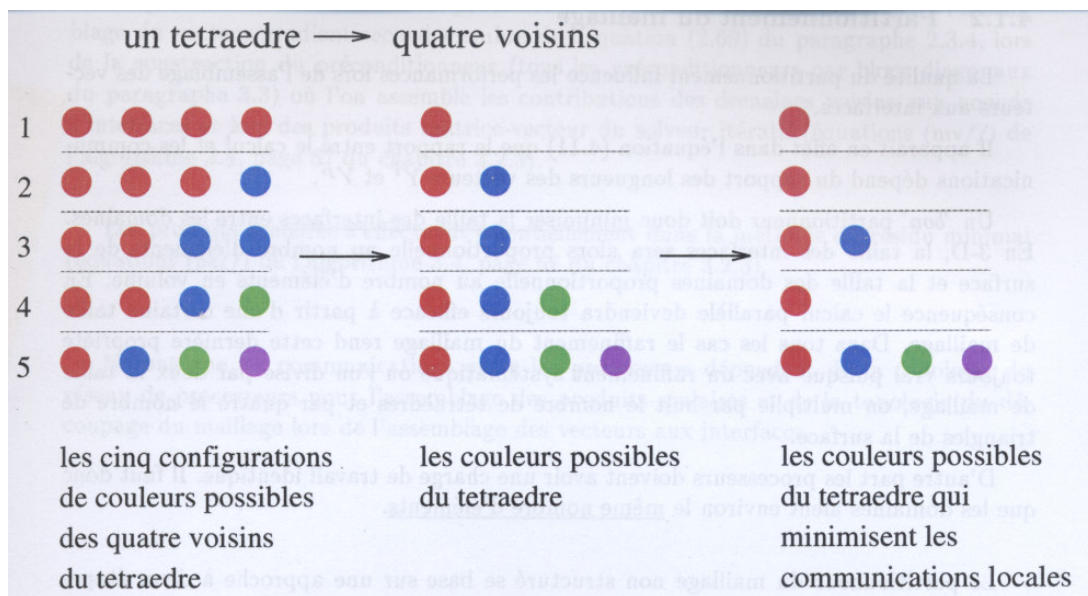


FIG. IV.2 – changement local de couleurs

IV.1.3. Remaillage parallèle

Le remaillage est adapté au calcul parallèle sur la base de la procédure de maillage séquentiel vue dans le premier chapitre. On ajoute simplement la contrainte de ne pas

"toucher" au maillage de l'interface entre les sous-domaines: ni ajout, ni destruction, ni déplacement de nœuds. En utilisant la stratégie S.P.M.D. le remaillage s'effectue principalement en deux opérations suivantes:

- la procédure de maillage (séquentiel) se déclenche indépendamment sur chaque processeur. Chaque sous-domaine est remaillé sans modifier ses interfaces. À ce niveau aucune communication entre les processeurs n'est nécessaire.

- après une procédure séquentielle de recollement des différents sous-domaines, un repartitionnement est effectué pour rééquilibrer les tailles des sous-domaines, ce qui déplace l'interface entre les sous-domaines, de sorte que lors du prochain remaillage cette partie du domaine sera remaillée.

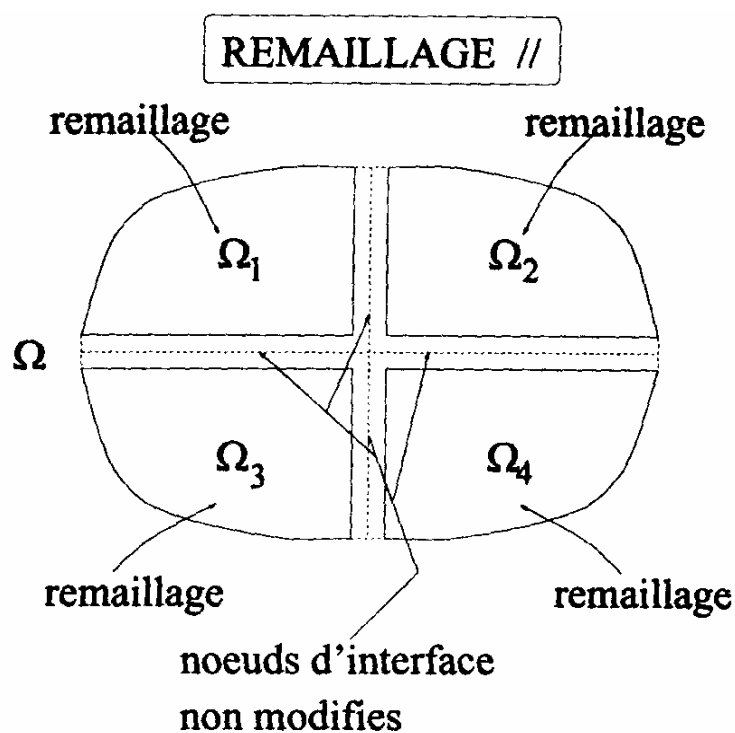


FIG. IV.3 - remaillage de chaque sous-domaine sur chaque processeur sans communication.

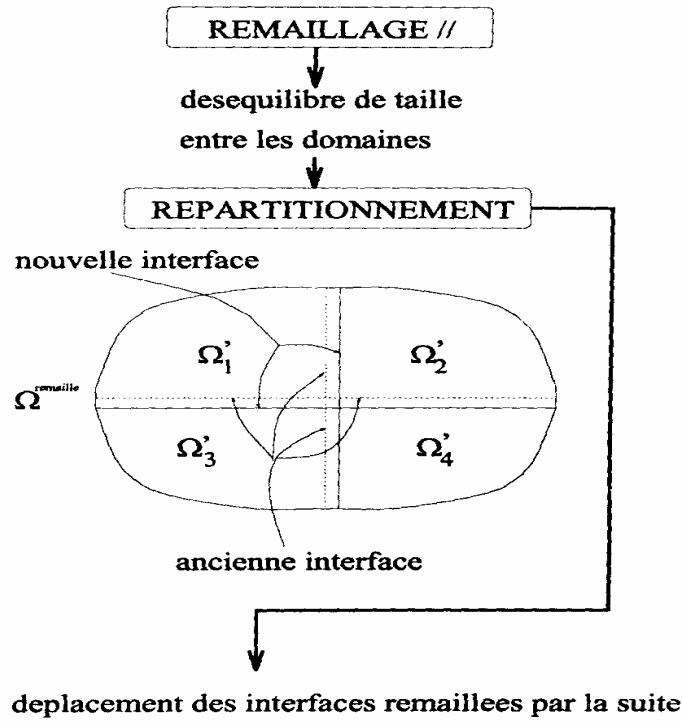


FIG. IV.4 - recollement et repartitionnement des différents sous-domaines

IV.1.4. Définition de quelques mesures de performances

La performance d'un programme parallèle se mesure par rapport au degré de parallélisme des différents algorithmes qui le constituent. Nous allons utiliser essentiellement deux mesures de performances pour évaluer nos algorithmes.

Le Speed-up donne l'accélération d'un programme parallèle :

$$S = \frac{t_{seq}}{t_{Nproc}} \quad (IV.15)$$

avec t_{seq} le temps d'exécution de l'algorithme séquentiel sur un processeur, t_{Nproc} le temps d'exécution de l'algorithme parallèle sur $Nproc$ processeurs.

L'efficacité donne le taux de parallélisme d'un algorithme pour un nombre de processeurs fixé :

$$e = \frac{S}{Nproc} \quad (IV.16)$$

En utilisant une machine parallèle constituée par un ensemble homogène de processeurs, l'efficacité peut être définie en pourcentage.

IV.2. Implémentation parallèle de l'analyse de contact entre corps déformables

IV.2.1. Stratégie générale de l'analyse de contact entre corps déformable

Soient Ω^1 et Ω^2 deux corps en contact. La parallélisation du contact entre corps déformables reprend la même stratégie S.P.M.D. que celle vue ci-dessus :

chaque corps est partitionné en N_{proc} sous-domaines (N_{proc} étant le nombre de processeurs):

$$\begin{aligned}\Omega^1 &= \bigcup_{p=1}^{N_{proc}} \Omega_p^1, \Gamma_{pl}^1 = \Omega_p^1 \cap \Omega_l^1 \\ \Omega^2 &= \bigcup_{p=1}^{N_{proc}} \Omega_p^2, \Gamma_{pl}^2 = \Omega_p^2 \cap \Omega_l^2\end{aligned}\quad (IV.17)$$

les Γ_{pl}^1 étant les interfaces entre les sous-domaines du corps Ω^1 et Γ_{pl}^2 ceux entre les sous-domaines du corps Ω^2 . Du fait que l'on effectue une résolution globale de notre problème de contact avec la technique du maître/esclave, les maillages des différents sous-domaines sont topologiquement considérés comme un unique ensemble sur chaque processeur :

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega^1 \cup \Omega^2 = \bigcup_{p=1}^{N_{proc}} \Omega_p^p; \quad \Omega^p = \Omega_p^1 \cup \Omega_p^2 \\ \Gamma^{pl} &= \Gamma_{pl}^1 \cup \Gamma_{pl}^2 = (\Omega_p^1 \cup \Omega_p^2) \cap (\Omega_l^1 \cup \Omega_l^2)\end{aligned}\quad (IV.18)$$

On exécute sur chaque processeur la version complète du logiciel (calcul entre plusieurs corps déformables) restreinte aux sous-domaines de chaque corps qui s'y trouvent.

De même que dans le cas du forgeage d'un corps déformable avec des outils rigides, sur chaque sous-domaine on prendra comme conditions aux limites les conditions aux limites du problème global. La surface de contact Γ_c entre les deux corps Ω^1 et Ω^2 étant une inconnue du problème, on duplique la structure surfacique des corps Ω^1 et Ω^2 sur tous les processeurs pour un éventuel traitement du repli de matière (de la même manière que cela a été fait pour la structure des outils rigides). Grâce à cette duplication, l'analyse du contact est effectué localement sur chaque processeur, sans nécessiter de communications entre eux (FIG. IV.5). Au début de chaque incrément de pas de temps, on ré-assemble les différents morceaux de peaux qui ont donc été déformés pendant l'incrément passé

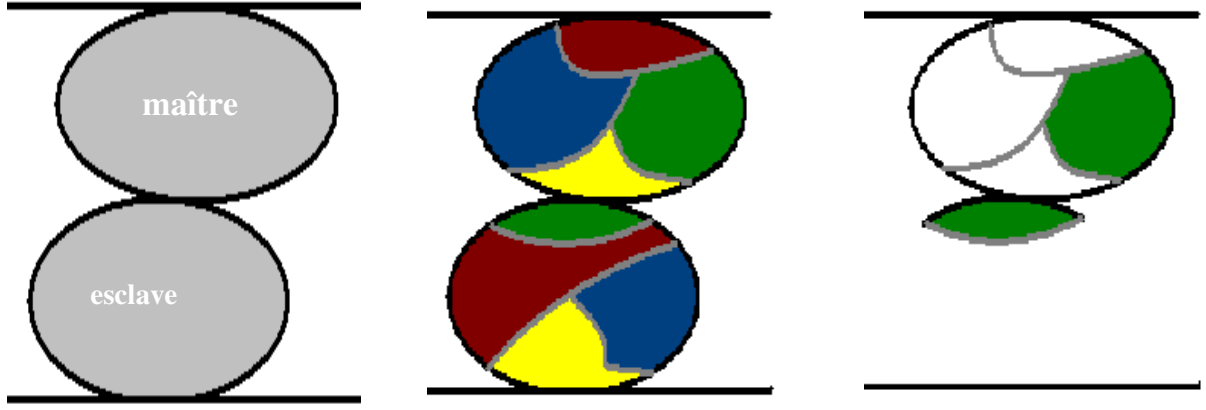


FIG. IV.5 - Stratégie S.P.M.D. du contact entre corps déformables

Avec cette stratégie, et pour tout processeur p , on effectue donc une analyse de contact entre le sous-domaine Ω_p^1 et la surface globale $\partial\Omega^2$ du corps Ω^2 .

IV.2.2. Parallélisation de la génération des éléments de contact fictifs

Pour simplifier l'écriture de la création des éléments de contact, on identifie les maillages des domaines et sous-domaines par la numérotation des nœuds qui les constituent:

$$M(\Omega) = \{1, \dots, nbnoe\}, \Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2 \quad (IV.19)$$

$$M(\Omega^p) = \{1, \dots, nbnoe(p)\}, \Omega^p = \Omega_p^1 \cup \Omega_p^2$$

avec $nbnoe$ le nombre de nœuds de la réunion des maillages des deux corps et $nbnoe(p)$ le nombre de nœuds de la réunion des maillages des sous-domaines de chaque corps sur le processeur p (chaque processeur ne contient qu'un seul sous-domaine de chaque corps).

L'analyse de contact nous permet de déterminer la distance qui sépare un nœud $j \in M(\Omega^p)$ du corps esclave d'une face $F^2 = \{f_1, f_2, f_3\} \subset M(\Omega)$ du corps maître. Pour écrire les conditions de contact et de frottement il est nécessaire de connaître la vitesse aux différents nœuds (j, f_1, f_2, f_3) et donc de communiquer des informations entre les processeurs. L'ensemble $\{j, f_1, f_2, f_3\}$ constitue un élément de contact qui n'a pas été pris en compte lors de l'opération précédente de partitionnement du domaine. On le rattache arbitrairement au processeur p où se trouve le nœud esclave j .

Si $loc^p(f_1) = 0$ (respectivement $loc^p(f_2) = 0$ ou $loc^p(f_3) = 0$) alors le nœud de numéro global f_1 n'appartient pas à Ω^p (respectivement le nœud de numéro global f_2 ou f_3 n'appartient pas à Ω^p). On pose pour f_1 :

$$\begin{aligned} loc^p(f_1) &= nbnoe(p) + 1, \\ M(\Omega^p) &= \{1, \dots, loc^p(f_1)\}, \\ \Omega^p &:= \{P(f_1)\} \cup \Omega^p \end{aligned} \quad (IV.20)$$

Et de même pour f_2 et f_3 .

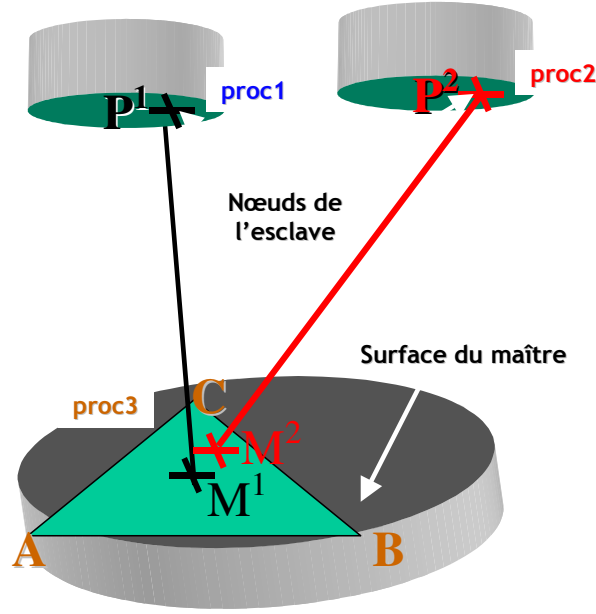


FIG. IV.6 - élément de contact avec des nœuds sur plusieurs processeurs

En notant l le numéro du processeur tel que $loc^l(f_1) \neq 0$, l'interface entre les domaines Ω^p et Ω^l est mise à jour:

$$\Gamma^{pl} = \{\Omega^p \cap \Omega^l\} \cup \{P(f_1)\} \quad (IV.21)$$

où $P(f_1)$ est le nœud de Ω de numéro global f_1 . Ultérieurement des communications seront nécessaires entre les processeurs p et l pour transmettre la valeur de la vitesse au nœud qui est sur le processeur l .

En résumé, on rajoute à Ω^p et Γ^{pl} tous les nœuds de Ω^l qui appartiennent à une face du corps maître et sur laquelle se projette un nœud de Ω^p du corps esclave.

Remarques:

D'un point de vue technique, au niveau de la programmation, les difficultés majeures se présentent dans le cas où le calcul est effectué sur plus de deux processeurs (p_1, p_2, p_3):

- le nœud esclave j (se trouvant sur le processeur p_1) est en contact avec une facette (f_1, f_2, f_3) appartenant au processeur p_2 et dont un nœud (par exemple f_3) se trouve sur l'interface entre les processeurs p_2 et p_3 . Ce nœud (f_3) devient alors un nœud de l'interface entre les processeurs p_3 et p_1 et donc la description de l'interface entre ces deux processeurs doit être actualisée.

- deux nœuds esclaves j et j' appartenant respectivement au processeur p_1 et au processeur p_2 sont en contact avec la même face du maître dont les informations volumiques sont sur le processeur p_3 . Les nœuds de la face du maître (f_1, f_2, f_3) deviennent alors des nœuds d'interface entre le processeur p_3 et les processeurs p_1 et p_2 . De plus ils deviennent aussi des nœuds d'interface entre les processeurs p_1 et p_2 .

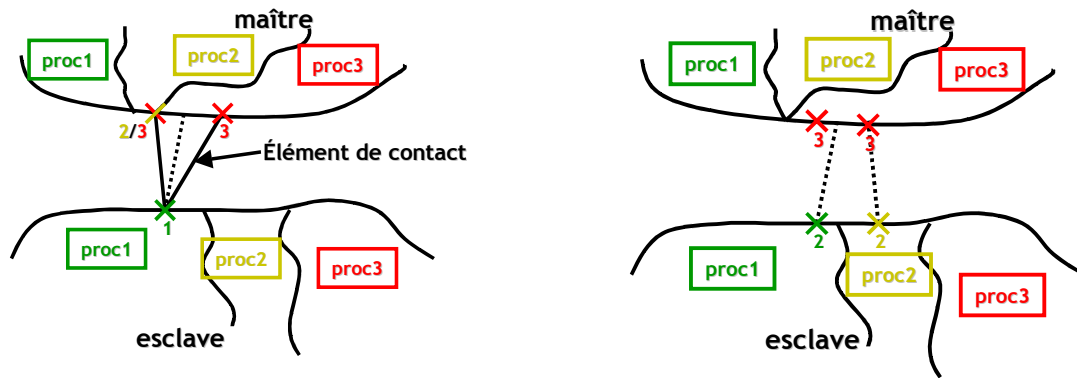


FIG. IV.7 - actualisations des interfaces

IV.3. Estimation des performances

Dans un premier temps, les calculs sont validés en vérifiant que le calcul en parallèle donne exactement les mêmes résultats, aux erreurs d'arrondi près, que le calcul séquentiel.

Pour une première estimation des performances de l'analyse du contact entre corps déformables en parallèle, nous avons effectué une simulation du forgeage du triaxe avec des outils rigides sur plusieurs processeurs, ensuite nous avons repris cette simulation avec des outils déformables.

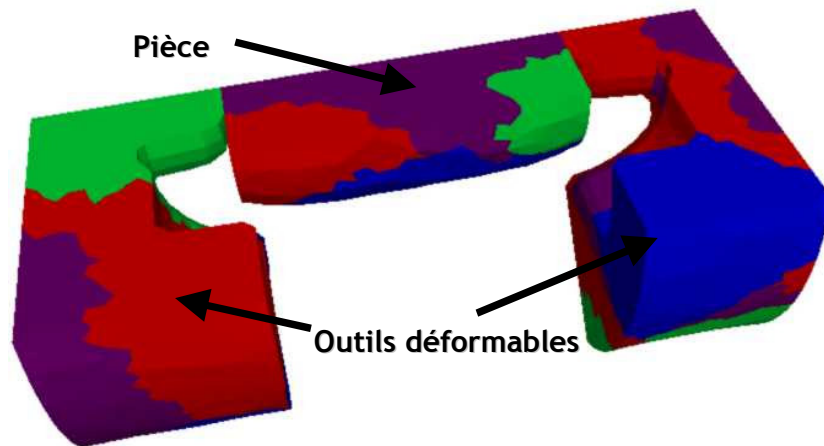


FIG. IV.8 – partitionnement du triaxe avec deux outils déformables sur quatre processeurs

Les tableaux suivants (TAB. IV.1 et TAB. IV.2) nous donnent le temps CPU et l'efficacité pour un nombre variable de processeurs:

Nombre de processeurs	Temps CPU (en secondes)	efficacité
1	8734	
2	6921	63%
3	4259	68%

TAB. IV.1 - Temps CPU et efficacité: cas du triaxe avec des outils déformables

Nombre de processeurs	Temps CPU (en secondes)	efficacité
1	2153	
2	1037	103%
4	822	65%

TAB. IV.2 - Temps CPU et efficacité: cas du triaxe avec des outils rigides

Le calcul avec des outils rigides en parallèle fait apparaître une accélération supérieure à 100% et imputable à un effet de mémoire cache. Avec quatre processeurs, on retrouve des valeurs d'efficacité habituelles lorsque l'on utilise un préconditionnement par Choleski Incomplet. En effet, ce préconditionneur n'a pas du tout la même efficacité (en tant que préconditionneur et capacité à réduire le nombre d'itérations de résolution) en séquentiel et en parallèle. C'est ce que l'on observe plus classiquement sur le calcul avec des corps déformables sur deux processeurs (voir la thèse [Perchat 2000] pour une discussion plus précise des performances de ce préconditionneur). Dans ces circonstances, une manière d'évaluer l'efficacité parallèle est d'utiliser le calcul sur deux processeurs comme référence. On trouve alors une efficacité de 108% de parallélisme en deux et trois processeurs (probablement dû à un meilleur partitionnement sur trois processeurs). Si on fait fi de ces explications, l'efficacité de 70% sur trois processeurs est bien comparable à celle généralement mesurée avec FORGE3[®].

Ces derniers tests nous permettent de valider notre implémentation et de vérifier que le taux de parallélisme du logiciel n'est pas dégradé par le calcul multi-corps.

Chapitre V

Cas tests de validations

V.1. Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté les techniques et algorithmes utilisés pour effectuer la résolution numérique de problèmes de forgeage mettant en œuvre plusieurs corps déformables. Un des objectifs de ce travail est d'obtenir des méthodes robustes et fiables. Ces qualités ne peuvent être vérifiées de manière satisfaisante que par des applications à des problèmes réels de forgeage.

Dans la suite, nous allons tout d'abord présenter trois problèmes académiques de forgeage de matériaux composites, puis un cas industriel de repli se produisant lors de la fabrication d'un train d'atterrissage. Ce cas nous a été fourni par la société Aubert & Duval (A&D). Pour finir nous présenterons un autre cas industriel, qui nous provient de la Société Nationale de Roulements (SNR). Ce cas est un exemple de simulation d'une pièce avec des outils déformables.

V.2. Forgeage de matériaux composites

V.2.1. Colaminage et poinçonnement de tôles plaquées

Les cas de forgeage de tôles plaquées que nous présentons ne sont pas rigoureusement des cas industriels mais des cas que nous avons élaborés avec des géométries et cinématiques d'outils simplifiées pour tester les algorithmes de couplage mécanique entre plusieurs corps déformables.

Le premier cas est un poinçonnage à froid de deux tôles en acier de même rhéologie (rhéologie élastoviscoplastique standard d'un acier à froid puisée dans la base de donnée de FORGE3® et de dimensions 100mm x 100mm x 10mm (FIG. V.1). À l'interface des corps, on a un contact avec frottement. Au cours de la simulation, on observe un glissement des tôles entre elles (voir FIG. V.2). Ce glissement relatif est rendu possible par le fait que le contact est unilatéral glissant et reproduit bien un comportement observé industriellement lors du poinçonnage de tôles.

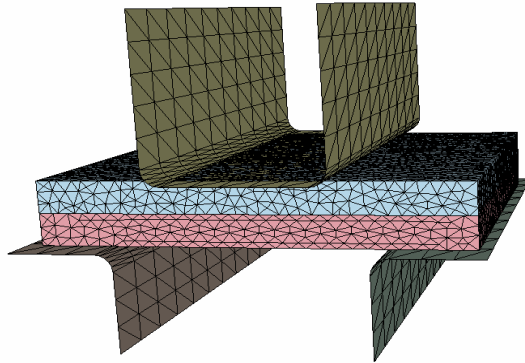


FIG. V.1 – Maillages des tôles et des outils rigides de poinçonnage

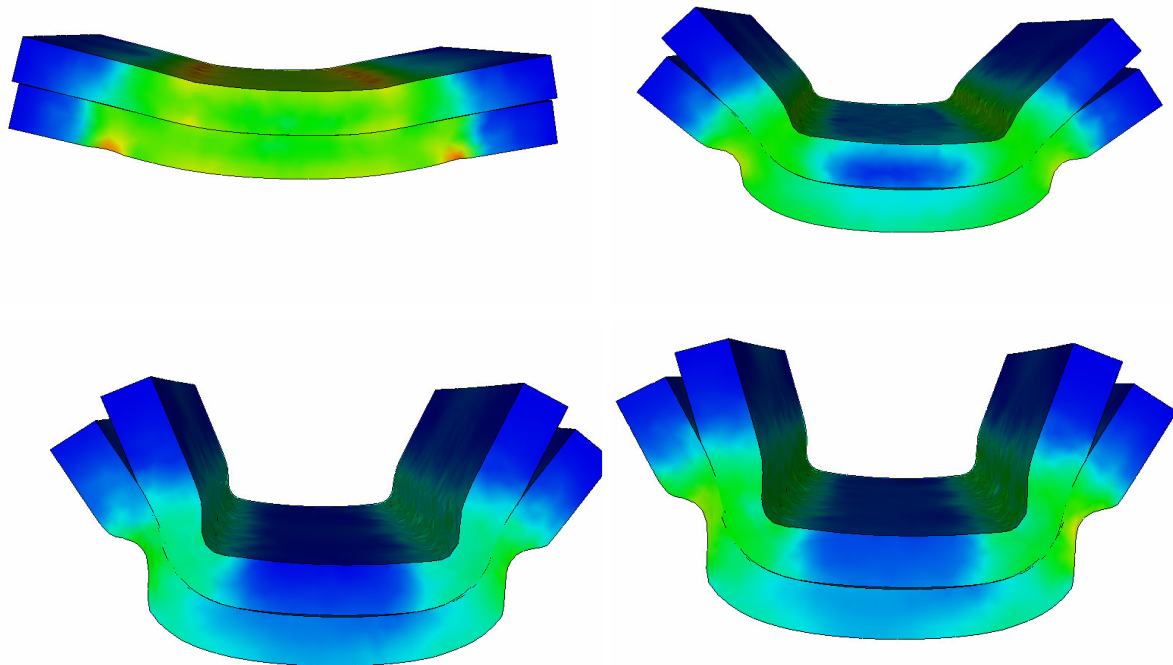


FIG. V.2 – profil des tôles au court du poinçonnage (avec isovaleurs de la déformation équivalente) à différents instants du procédé.

Le deuxième cas d'application est celui du colaminage de plusieurs tôles. Ici on est en présence de sept corps déformables avec des rhéologies presque similaires. Les dimensions de la base et de l'insert sont énormes par rapport à celles de l'entretoise et de la soudure (voir FIG. V.3). Ceci nous a permis de tester la robustesse de l'algorithme de contact dans le cas où les tailles de mailles des différents corps déformables sont très différentes. Sur la figure FIG. V.4 on a le début d'indentation entre les rouleaux. Les isovaleurs de contact montrent que la pénétration des matériaux l'un dans l'autre est du même ordre que la précision sur la résolution pénalisée de la condition de contact. Le maillage de ce cas n'a été possible qu'avec des éléments anisotropes aussi n'est on pas allé très loin dans la déformation des différents corps et dans la simulation du colaminage proprement dite faute de disposer alors d'un remailleur anisotrope.

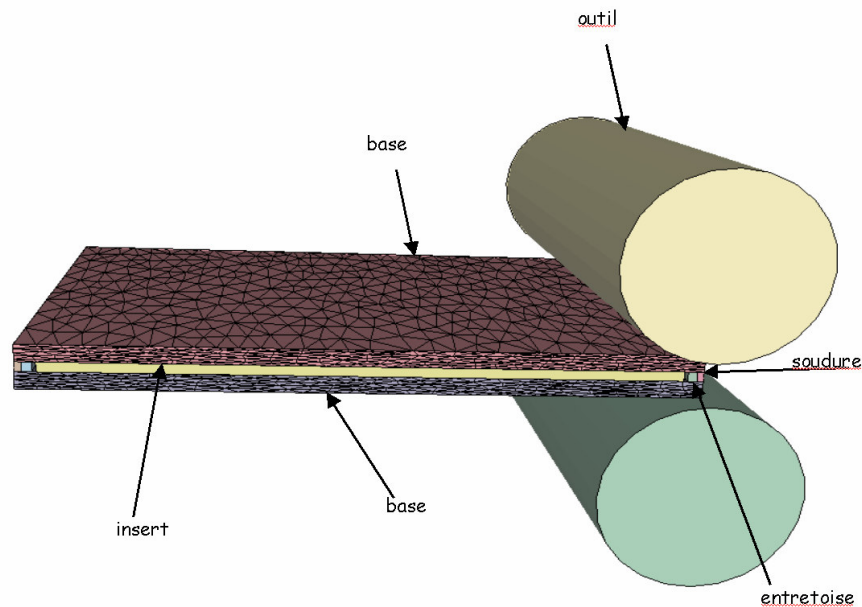


FIG. V.3 – colaminage d'une tôle sandwich

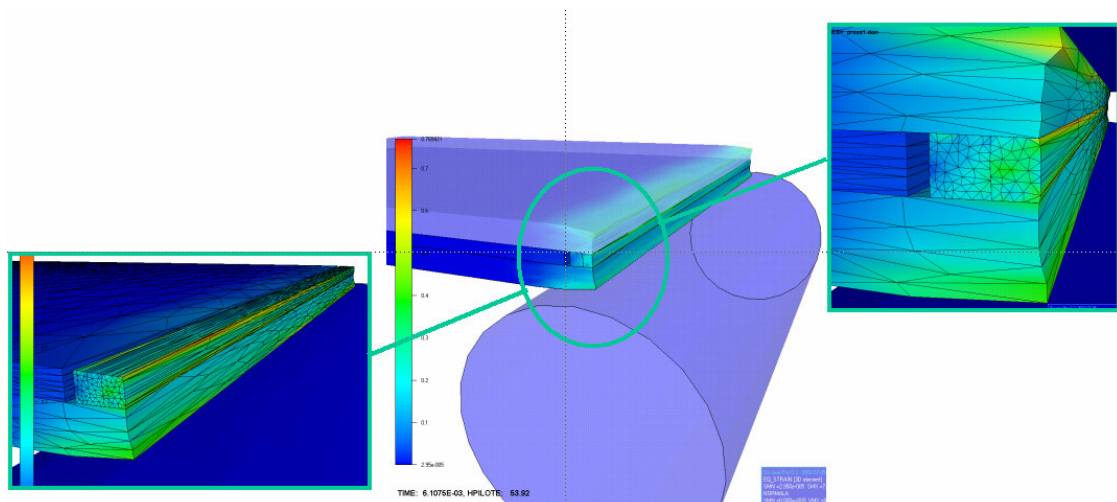


FIG. V.4 – début de calcul: indentation entre les rouleaux

Ces deux cas ont été effectués pour tester la robustesse de l'algorithme de contact dans le cas où les corps déformables ont des rhéologies proches ou identiques.

V.2.2. Écrasement d'un cube avec des inclusions

V.2.2.a. Présentation

Le procédé consiste à écraser entre deux tas plats rigides une matrice (de dimensions 100mm x 100mm x 100mm) contenant deux inclusions cylindriques (de dimensions $R=20\text{mm}$, $r=10\text{mm}$, $h=20\text{mm}$) (FIG. V.5). Le composant a une longueur infinie avec une symétrie de répétition (FIG. V.6).

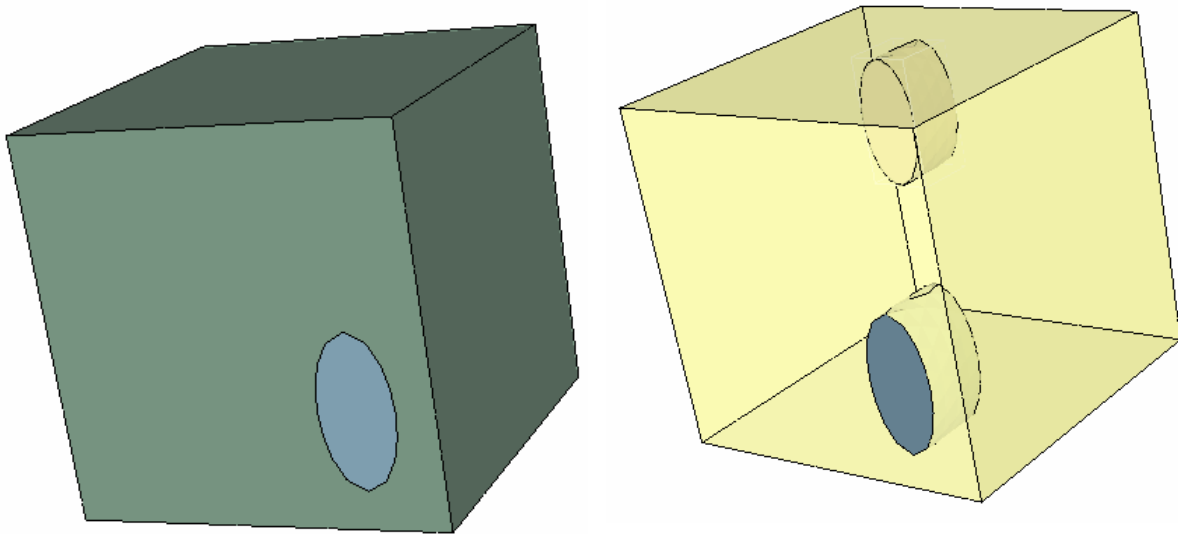


FIG. V.5 – Inclusions à l'intérieur de la matrice

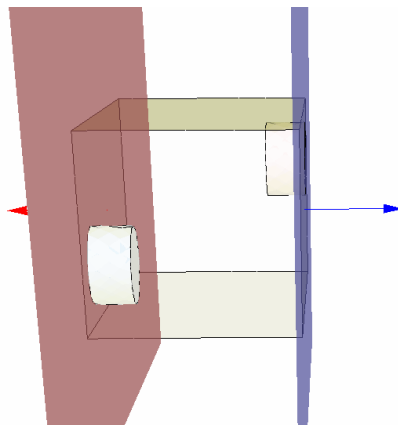


FIG. V.6 – plans de symétrie

L'objectif de cette simulation est de prédire les déformations à l'intérieur de la matrice et ainsi que la zone de contact entre cette dernière et les inclusions. Au niveau numérique, le but est aussi de montrer la faisabilité d'une simulation de forgeage de matériaux composites

(rhéologies différentes) pour de grandes déformations (remaillage), avec plusieurs zones de contact possibles.

V.2.2.b. Géométries et matériaux

Les corps déformables sont constitués par la matrice parallélépipédique et les deux inclusions cylindriques. Les maillages de ces corps sont constitués d'éléments tétraédriques (FIG. V.7).

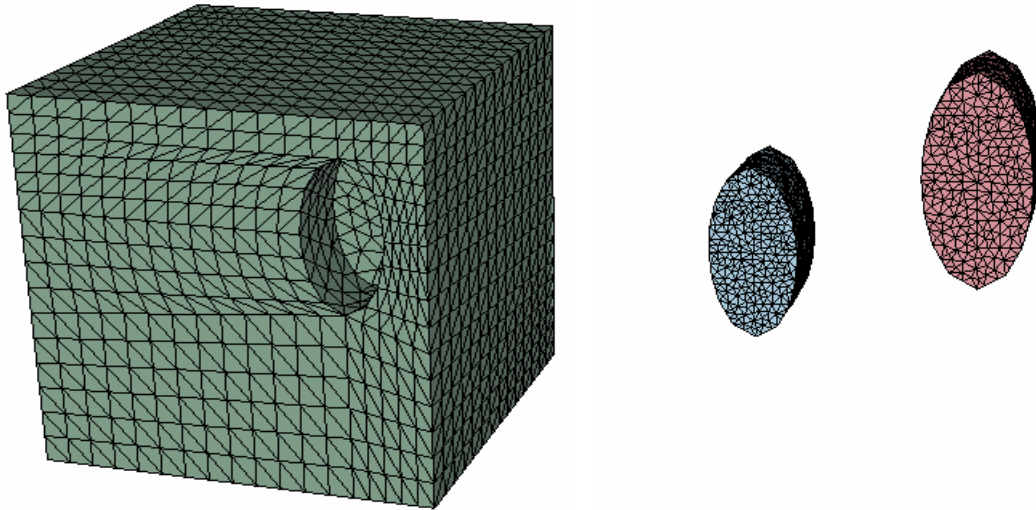


FIG. V.7 – maillages des corps déformables

Dans le tableau TAB. V.1 nous avons indiqué les dimensions des différents maillages au début de la simulation. Mais au cours du forgeage, suite aux remaillages, ces valeurs sont modifiées.

corps	Outil supérieur	Outil inférieur	matrice	Inclusion 1	Inclusion 2	Total (corps déformables)
Nombre de nœuds	4	4	9188	3479	3479	16146
Nombre d'éléments	2	2	48805	17163	17163	83131

TAB. V.1 – Nombre de nœuds et d'éléments

Nous avons réalisé cette simulation dans des conditions de forgeage à chaud avec une température initiale de 729° C. La rhéologie de chaque matériau est considérée comme isotrope, et suit une loi viscoplastique (loi de Norton-Hoff), avec un écrouissage et adoucissement thermique (coefficients n et β).

Pour chaque corps la valeur des différents paramètres est donnée dans le tableau TAB. V.2:

corps	Matrice	Inclusions
K_0 (kpa)	1693000	3386000
m	0.139	0.139
n	0.113	0.113
β	0.00244	0.00244

TAB. V.2 - paramètres de rhéologie (consistance, sensibilité à la vitesse de déformation, coefficient d'écrouissage et d'adoucissement thermique)

V.2.2.c. Conditions aux interfaces

Les outils rigides se déplacent à vitesse constante. L'outil du bas reste fixe au cours du procédé tandis que celui du haut a une vitesse de 100mm/s suivant la direction de l'axe Z. Aux interfaces entre les différents corps (rigides et déformables) la loi de frottement est de type viscoplastique avec $\alpha_f = 0.4$ et $p_f = 0.139$.

V.2.2.d. Résultat

Pour la résolution des systèmes linéaires, nous avons utilisé un préconditionneur de Cholesky incomplet. Après une course d'environ 36mm on peut voir sur la figure FIG. V.8 les isovaleurs de contact entre les différents corps. Au cours de la simulation, les inclusions se détachent de l'interface de contact avec la matrice. Ceci est dû à la condition de contact unilatéral et à la différence de rigidité du matériau. Au cours de la simulation, on observe une pénétration maximum entre les différents corps de 0.444 mm, ce qui est cohérent avec la précision de la méthode de pénalisation où le coefficient de pénalisation est égal à 100.

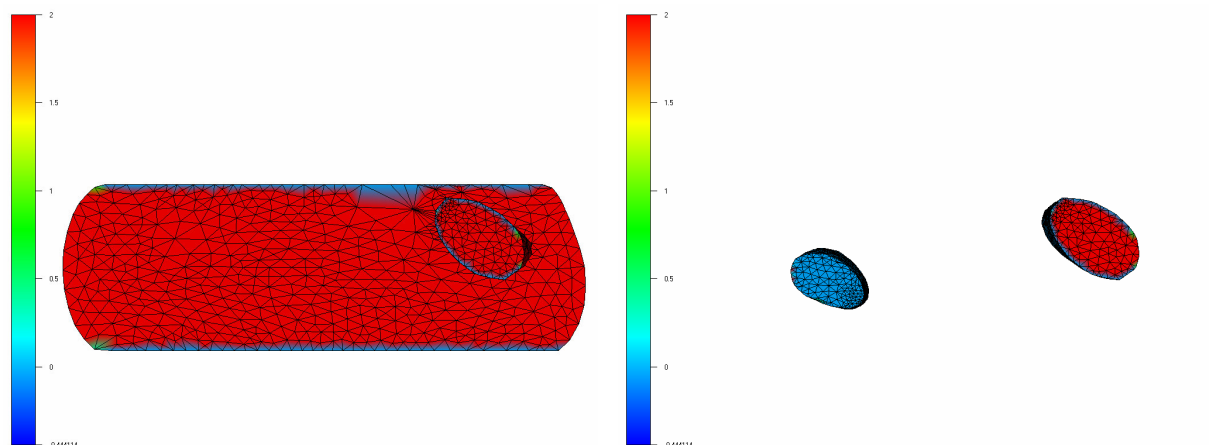


FIG. V.8 - matériau composite: isovaleurs de contact sur la matrice et sur les inclusions, en fin de forgeage

V.3. Forgeage d'un train d'atterrissage

V.3.1. Présentation du cas

Ce cas de forgeage nous vient de la société Aubert & Duval et concerne la fabrication d'un train d'atterrissage. Nous nous intéresserons à l'étape de finition du forgeage. C'est un "gros" cas de dimensions 1495mm x 591mm x 350mm. Durant le procédé, un repli de matière est observé sur la tête de la pièce (FIG. V.9).

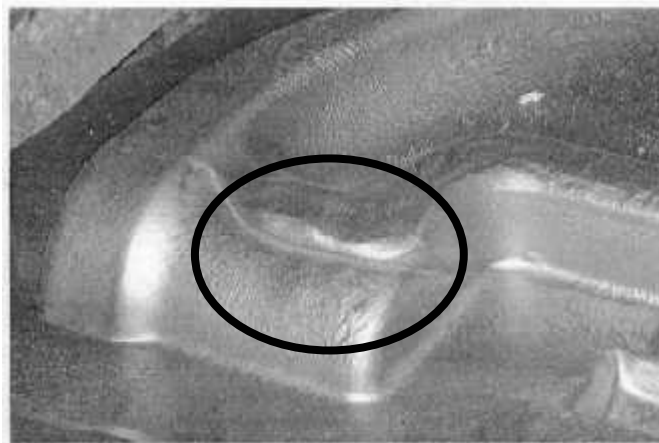


FIG. V.9 - défaut au niveau de la tête de l'aube, en fin de forgeage

Lors de la simulation numérique du procédé avec la version standard de FORGE3® (sans le module de détection et de traitement du repli) un dépouillement très fin permet de déceler la formation du repli (FIG. V.10). Mais sans gestion du repli, ce dernier disparaît éliminé par les opérations successives de remaillage (FIG. V.11).

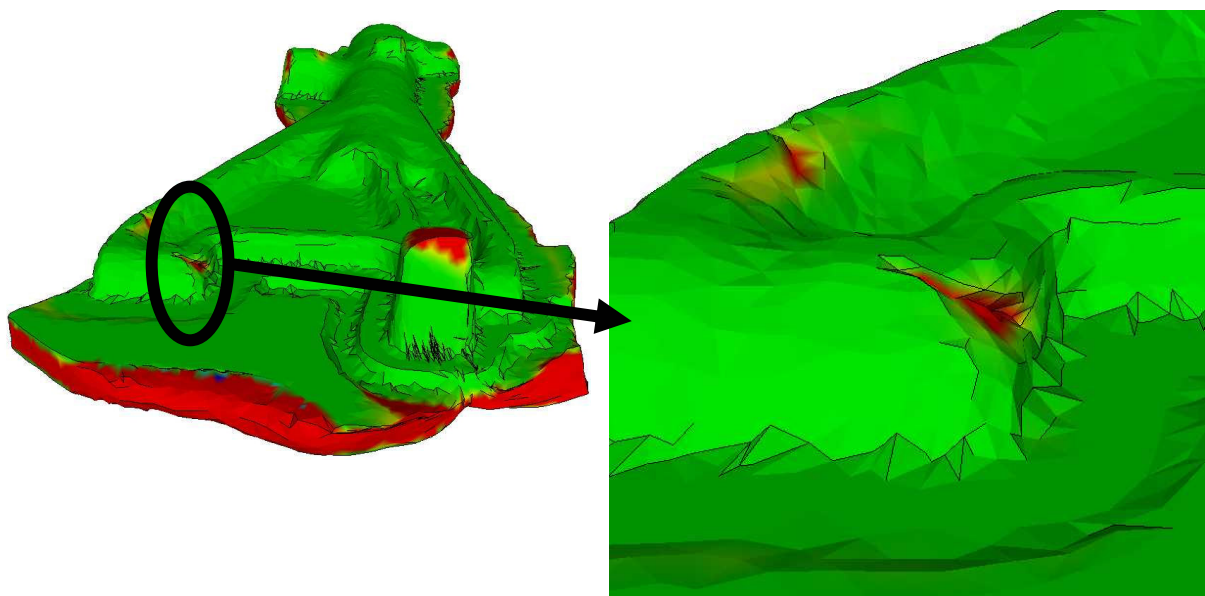


FIG. V.10 - apparition du repli (sans le module de traitement du repli)

On peut plus précisément observer, sur la figure FIG. V.11, l'interpénétration du maillage dû à l'absence du traitement de l'auto-contact. Les calculs continuent avec un écoulement de matière erroné localement. Et le contact entre différentes parties du même corps n'étant pas traité, il y a interpénétration de la matière dans la zone du repli.

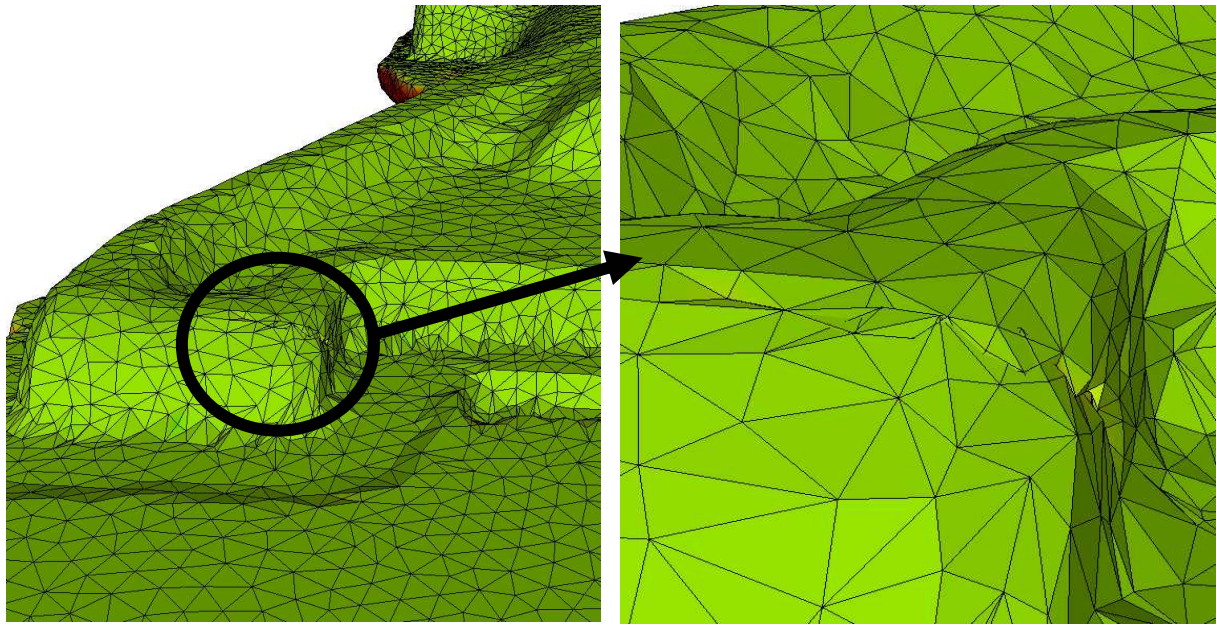


FIG. V.11 – zoom sur l'enchevêtrement du maillage

L'objectif de notre travail du chapitre IV est de pouvoir déceler et suivre le repli de matière au cours de la simulation.

V.3.2. Géométrie et matériau

La pièce est maillée avec des éléments tétraédriques. Et la surface des outils rigides est maillée par des triangles (FIG. V.12).

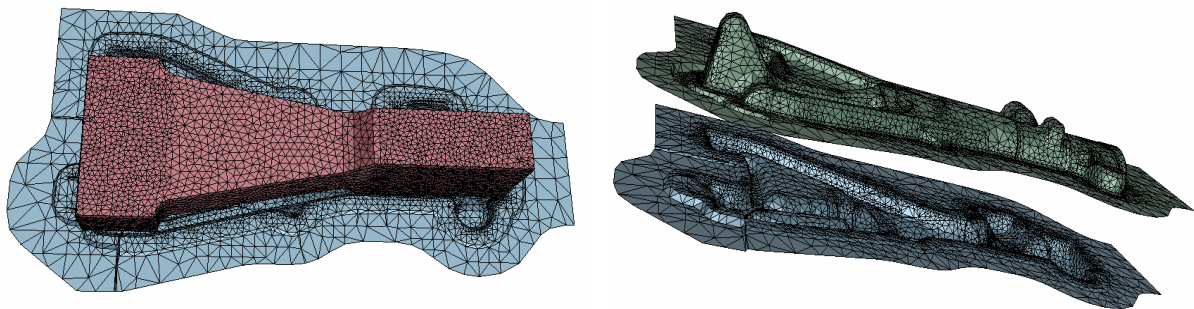


FIG. V.12 - maillages de la pièce et des outils rigides

Le tableau TAB. V.3 nous donne les dimension des maillages au début de la simulation:

corps	Outil supérieur	Outil inférieur	Train d'atterrissage
Nombre de nœuds	5551	5584	19824
Nombre d'éléments	11013	11084	101700

TAB. V.3 - dimensions des maillages du forgeage du train

Le procédé est simulé à chaud. La température initiale de la pièce est de 750°C. La rhéologie de la pièce suit une loi viscoplastique de type Norton. Le tableau TAB. V.4 nous donne la valeur des différents paramètres de la rhéologie:

Paramètres	Valeurs
K_0 (kpa)	336
m	0.14
n	0.03
β	6669

TAB. V.4 - paramètres de la rhéologie (consistance, sensibilité à la vitesse de déformation, coefficient d'écrouissage et d'adoucissement thermique)

V.3.3. Conditions aux interfaces

L'outil supérieur a une vitesse de (5mm/s) suivant la direction Z et l'outil inférieur reste fixe. Le contact entre les outils et la pièce est unilatéral glissant avec une loi de frottement viscoplastique avec: $\alpha_f = 0.6$ et $p_f = 0.14$. Le calcul thermique est effectué de manière classique en utilisant les données fournies par A&D (conductivité ...).

V.3.4. Résultats

Sur la figure FIG. V.13, la formation du repli de matière est détectée sur la tête de la pièce grâce aux isovaleurs de l'auto-contact et donc sans avoir besoin d'effectuer un dépouillement "manuel" très fin. La gestion du repli est effectuée automatiquement. Le contact est considéré comme bilatéral collant dans la zone de repli.

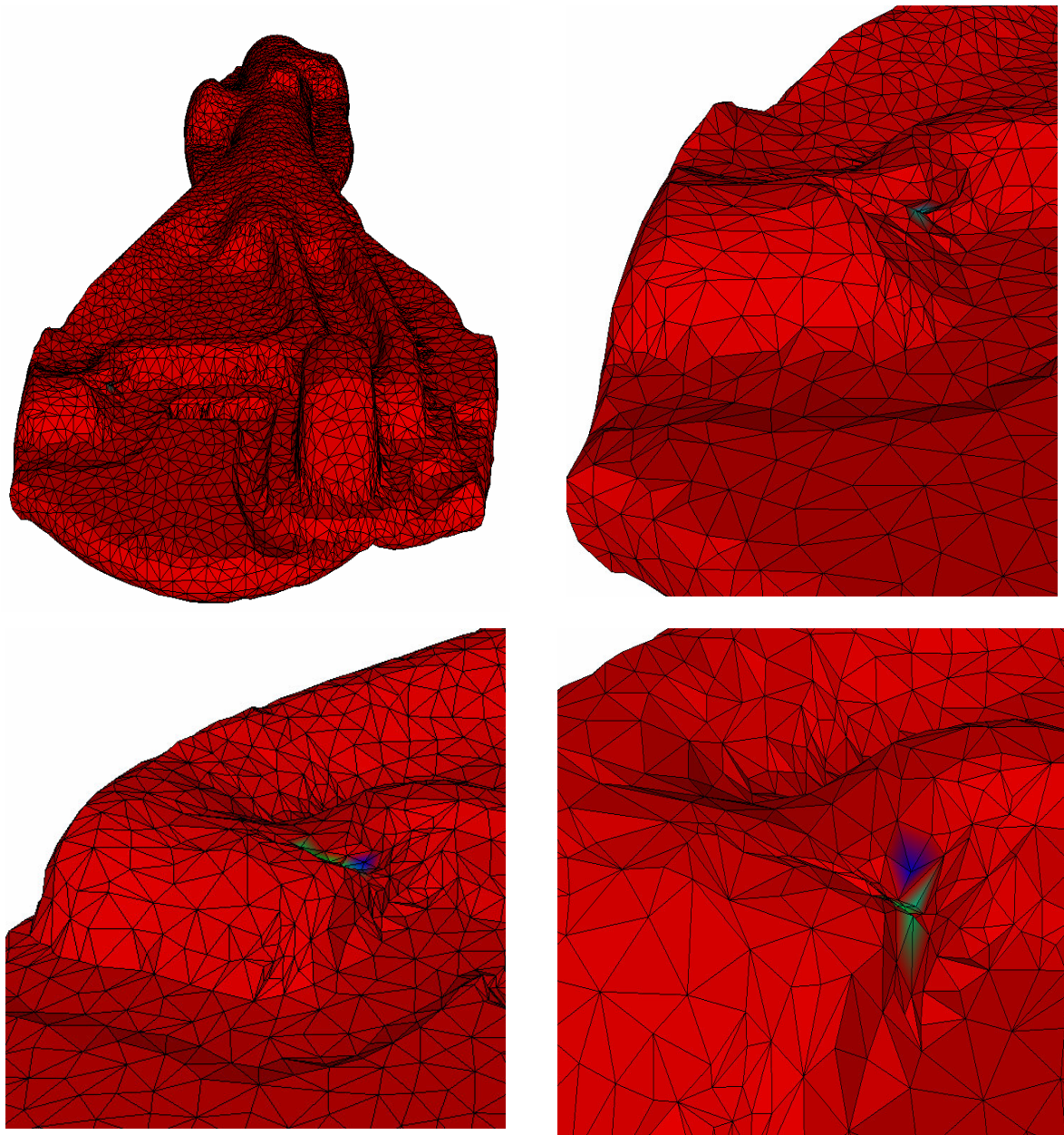


FIG. V.13 - Formation et gestion du repli sur la tête la pièce

A la fin de la simulation (FIG. V.14), le repli est toujours présent sur la tête de la pièce. On peut observer qu'il n'y pas d'enchevêtrement du maillage contrairement à ce qui a été aperçu sur la figure FIG. V.11.

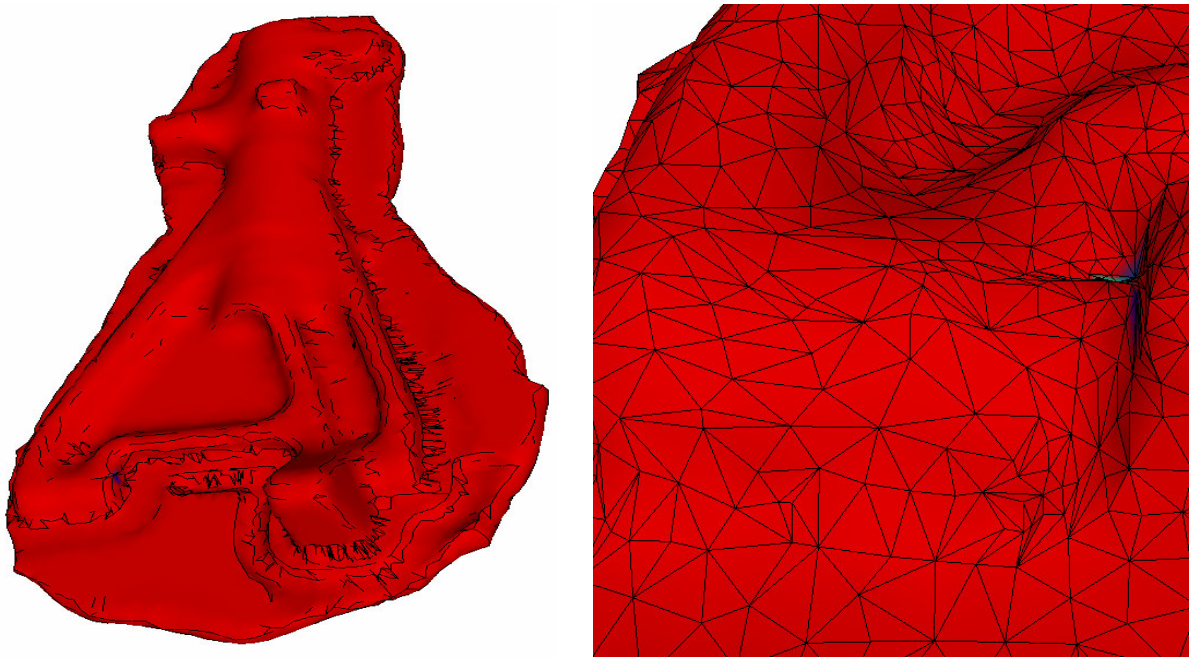


FIG. V.14 - zone de repli à la fin de la simulation

V.4. Sertissage de roulements de roues par bouterollage

V.4.1. Présentation du cas

Ce cas nous a été fourni par la Société Nationale de Roulement (SNR). Le sertissage des roulements de roues est un procédé d'assemblage qui consiste à rabattre la collerette d'un moyeu sur la face d'une bague intérieure pour solidariser l'ensemble avant d'appliquer la précharge axiale du roulement.

Le procédé de bouterollage, basé sur le principe de forgeage ou rivetage orbital, est un moyen de réaliser cette opération de sertissage. Le mouvement orbital résulte de la combinaison d'une double rotation de la bouterolle sur elle même et autour de l'axe ainsi que d'une translation du roulement.

La bouterolle est un outil de forme incliné par rapport à l'axe de rotation de la broche. Son comportement libre en rotation sur son axe propre est modélisé par un contact glissant avec la pièce. Le roulement est bloqué sur un support monté sur vérin qui commande le déplacement axial.

Pour la mise au point du procédé, nous considérons seulement la partie supérieure du moyeu comportant le nez de sertissage et la bague intérieure.

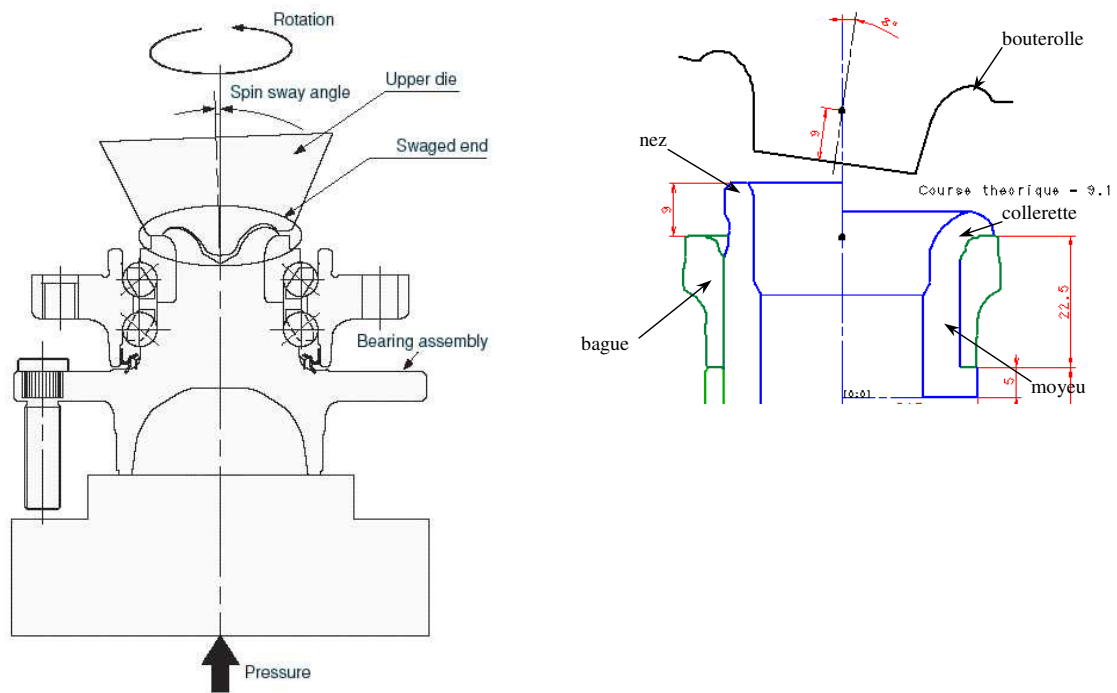


FIG. V.15 – Principe du bouterollage

Les objectifs de la modélisation numérique sont de prédire la forme de la collerette du moyeu, ainsi que, les déformations et contraintes dans la bague.

V.4.2. Géométries et matériaux

Le verin est modélisé par un tas plat. Sur la figure (FIG. V.16) les différents maillages sont présentés.

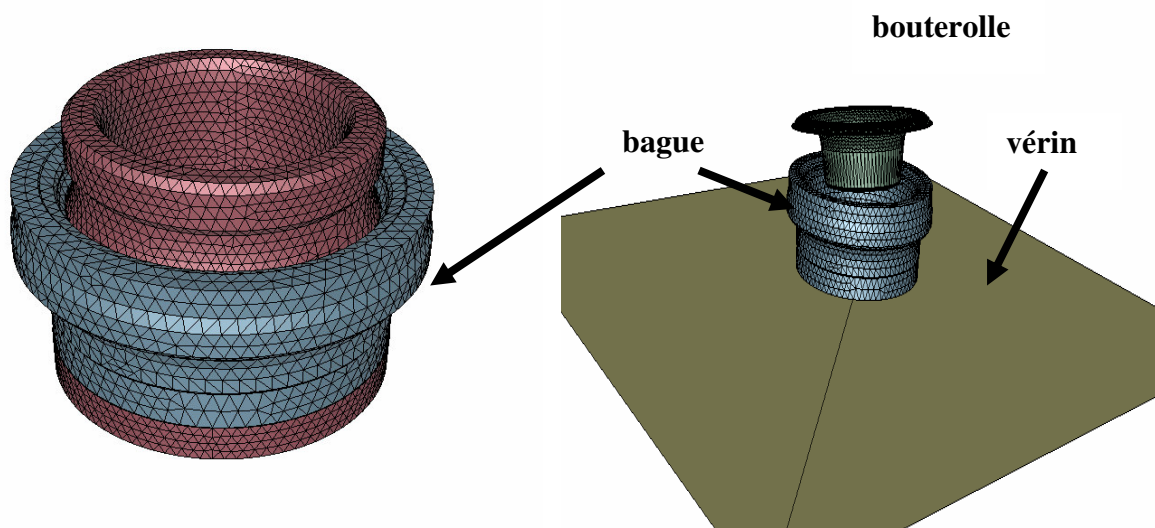


FIG. V.16 - géométries des corps déformables et des outils rigides

L'opération est réalisée à froid. Le moyeu est en acier 100Cr6 recuit. Sa loi de comportement est élastoviscoplastique avec une d'écrouissage du type Hansel & Spittel (source : ITA - Forming Properties Database):

$$\sigma_0 = A_1 \cdot e^{m_1 T} \cdot \bar{\epsilon}^{m_2} \cdot e^{\frac{m_4}{\bar{\epsilon}}} \cdot \dot{\bar{\epsilon}}^{m_3} \quad (V.1)$$

Paramètres	A_1 (Mpa)	m_1	m_2	m_3	m_4	E (Gpa)	ν
valeur	1060.944765	-0.00108	0.22065	0.01121	0.00065	205	0.29

TAB. V.5 – paramètres de la rhéologie du moyeu

Domaine de validité : $20 < T_c < 300$; $0.04 < \bar{\epsilon} < 1.8$; $0.01 < \dot{\bar{\epsilon}} < 500$. La bague est en 100Cr6 trempé dans la masse à 63HRC. Son comportement est purement élastique : $E=207$ GPa; $\nu=0,29$.

V.4.3. Conditions aux interfaces

Le pilotage du vérin (tas plat) est pris en compte par une loi de presse hydraulique : la course s'effectue suivant la direction de l'axe Z à la vitesse de 15mm/s, l'effort maximal admissible est de 100T. La bouterolle est en rotation suivant l'axe Z à 1000tr/min,

Le procédé complet de sertissage se décompose en 4 phases :

- Frettage de la bague sur le moyeu. Cette opération est supposée avoir été déjà effectuée (on néglige les contraintes résiduelles du frettage).
- Laminage : rotation de la bouterolle combinée à la remontée du vérin pendant une durée de 0,6067s soit 10,11 tours. Le vérin effectue une course de 9,1mm.
- Planage : arrêt du vérin, la bouterolle continue sa rotation pendant 0,06s (environ 1 tour).
- Déchargement élastique : arrêt de la bouterolle et descente du vérin (durée 0,34s).

Le coefficient de frottement moyeu / bague est de type Tresca ($\tau = \bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$, $\bar{m} = 0,40$).

La bouterolle est en contact unilatéral glissant sans frottement avec le moyeu ($\bar{m}=0$). Le support est collé à la base du moyeu (contact bilatéral-collant),

Les paramètres thermiques du 100Cr6 et les conditions limites entre la pièce et les outils rigides sont les suivants : $\lambda=41.2$ W/m/K, $\rho=7812$ kg/m³, $C_p=505$ J/kg/K, $\alpha_{out}=2000$, $b=11763$, $T_{out}=20^\circ\text{C}$, $\alpha_{ext}=10$, $T_{ext}=20^\circ\text{C}$,

V.4.4. Résultats

Sur la figure FIG. V.17 on observe la forme de la collerette une fois que toutes les phases du procédé sont effectuées.

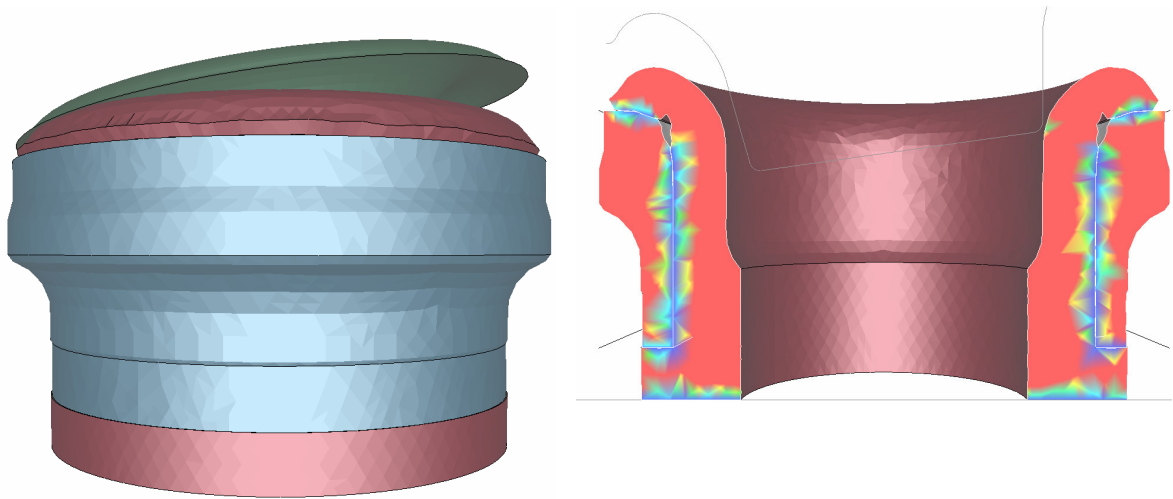


FIG. V.17 - Forme de la collerette et isovaleurs de contact

Le maximum de la déformation plastique est du même ordre de grandeur (environ 2.05) que le critère empirique de 2. La zone d'écrouissage de la collerette se localise sur l'interface de contact avec la bouterolle (FIG. V.18).

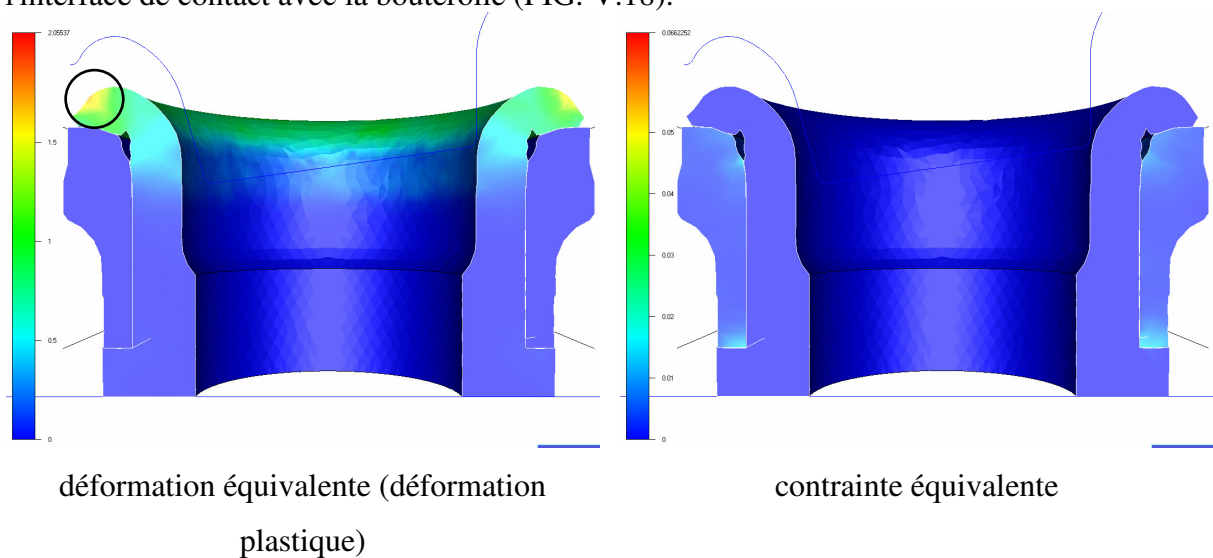


FIG. V.18 - contraintes dans la bague et la collerette

Durant la phase de laminage, les forces sur la bouterolle reste inférieure à la valeur empirique de 100 tonnes FIG. V.19. Ce calcul permet également de visualiser les contraintes dans les deux matériaux.

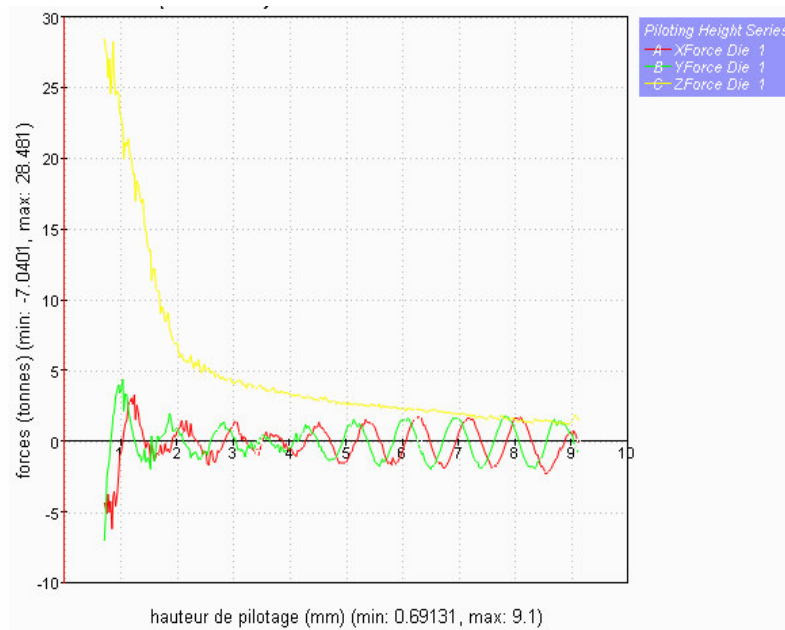


FIG. V.19 – forces suivant chaque axe sur bouterolle

Conclusion

Au cours des deux premiers chapitres, nous avons présenté la modélisation mécanique et numérique en particulier la modélisation des conditions de contact entre un corps déformable et un outil rigide. Nous avons présenté les grandes lignes des différents outils numériques et physiques utilisés dans le logiciel FORGE3®.

Les trois derniers chapitres ne sont qu'une modeste participation qui s'inscrit dans la continuité de plusieurs siècles de travail sur les lois fondamentales de la mécanique et de la modélisation numérique, et de trente années de développement dans les techniques de simulation par éléments finis au Cemef en collaboration avec les industries de la forge et la société de développement de logiciels TRANSVALOR®.

Notre travail a consisté, tout d'abord, à adapter les outils existant pour la résolution du problème de contact entre différents corps déformables, et ensuite à mettre en oeuvre d'autres méthodes pour une plus grande précision. Nous avons ainsi développé dans le logiciel FORGE3® les points suivants:

- l'extension et l'adaptation de l'algorithme d'analyse du contact entre un corps déformable et un corps rigide au contact entre corps déformables. Ceci nous a permis de garder la robustesse et l'efficacité de l'algorithme de résolution du problème de forgeage d'un corps déformable.

- Nous avons étendu ces méthodes aux traitements du repli avec un algorithme de contact plus complexe.

- Nous avons abordé l'écriture discrète des conditions de contact et de frottement aux nœuds en utilisant la technique du maître/esclave et la méthode de pénalisation. Le frottement a été simplifié avec une condensation nodale. Puis nous avons évolué vers une intégration plus précise du frottement aux points de Gauss. Par ailleurs, l'objectivité de la vitesse de glissement a été étudiée et il s'avère que sa prise en compte n'est pas nécessaire.

- La technique du maître/esclave présentant certaines lacunes (traitement non symétrique des conditions de contact), notamment quand la surface de contact du corps maître a une discrétisation plus fine que celle du corps esclave, nous avons développé un algorithme pseudo-symétrique.

- la stratégie générale d'extension de l'analyse de contact nous a aussi permis d'aborder la parallélisation de l'analyse et le traitement du contact entre corps déformables comme un prolongement de la parallélisation de la version de FORGE3[®] avec un seul corps déformable et des outils rigides. Ce qui nous a permis de conserver l'efficacité et la robustesse de la version parallèle de FORGE3[®].

Les applications industrielles confirment l'efficacité et la robustesse de nos différents choix de méthodes et de techniques.

Pour ce qui est des extensions du travail, elles ont été déjà entamées avec les différentes études aux seins du Cemef notamment l'étude du traitement de la thermique entre corps déformables par L. Terzolo dans sa thèse où nos différentes méthodes ont été reprises. Le forgeage d'engrenages hélicoïdaux qui a été abordé dans la thèse de S. Popa en considérant des symétries axiales et qui fait appel à ces mêmes méthodes.

L'étude du traitement pseudo-symétrique devra être encore plus approfondie avec des applications plus complexes. Nous avons vu que la méthode de pénalisation était satisfaisante mais l'introduction des paramètres de Lagrange serait très utile à réaliser. Ils introduisent des degrés de liberté supplémentaires et accroissent la complexité de l'algorithme de résolution, mais permettent d'avoir une meilleure précision. De même, la détermination d'un critère de maillage adaptatif par l'intermédiaire d'une estimation d'erreur *a posteriori* devra atténuer les oscillations à l'interface de contact.

Une plus grande optimisation des communications de la parallélisation du contact entre corps déformables est à effectuer. Et éventuellement en utilisant une méthode de décomposition de domaine comme par exemple la méthode FETI [Farhat *et al.* 91].

Bibliographie

- [Ach *et al.* 00] K. Ach and P. Alart. Modelling of an imperfect joint and study of instability in numerical scheme. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, Septembre 2000*.
- [Agassant *et al.* 96] J. Agassant, P. Avenas, J.-Ph. Sergent, B. Verges and M. Vincent. *La mise en forme des matières plastiques*. Lavoisier TEC&DOC, 3^{ième} édition, 1996.
- [Alart *et al.* 98] P. Alart, M. Barboteu, F. Lebon and S. Pagano. Efficient preconditioners and domain decomposition methods for frictional contact problems and applications. In S. Idelsohn, E. Oñate and E. dvorkin, (Editors), *Computational Mechanics, New Trends and Applications*, Barcelona, Spain, 1998.
- [Alart 97] P. Alart. Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact. *Journal Mathématiques Pures Appliquées*, 76:83-108, 1997.
- [Aliaga *et al.* 98] C. Aliaga, O. Jaouen, E. Massoni, and M. Bellet. *A new stabilized mixed f.e. formulation for 3d numerical simulation of thermo-elasto-viscoplastic behavior*. Rapport interne, CEMEF, école des mines, Sophia Antipolis, France, 1998.
- [Barboza *et al.* 03] J. Barboza and L. Fourment. *3D contact between Deformable Bodies in Forging: parallel and algorithmic aspects*. VII International Conference on Computational Plasticity, COMPLAS 2003, 7-10 April 2003
- [Barboza *et al.* 02] J. Barboza, L. Fourment, and J.-L. Chenot. *Contact algorithm for 3D multi-bodies problems: application to forming of multi-material parts and tool deflection*. **WCCM V** Fifth World Congress on Computational Mechanics July 7-12, 2002, Vienna, Austria Eds.: H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner.
- [Barboza *et al.* 02] J. Barboza and L. Fourment. *3D contact algorithm for multi-bodies problems ; : application to forging multi-materials parts*. EUROMECH 435 Friction and Wear in Metal Forming, june 18-20 2002, Valenciennes, France
- [Belgacem 93] F. B. Belgacem. *Discrétisation 3D non conformes par la méthode de décomposition de domaine des éléments avec joints: analyse mathématique et mise en œuvre pour le problème de Poisson*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, Paris, Janvier 1993.
- [Bellet 94] M. Bellet. Mécanique et thermique des milieux continus. In *Séminaire de plasticité Éléments finis et mise en forme des métaux*, volume 1, pages 1-56, Sophia Antipolis, Septembre 1994. Centre de Mise en Forme des Matériaux, École Nationale Supérieures des Mines de Paris.
- [Bernadi *et al.* 94] C. Bernadi, Y. Maday and A. T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method. In H. Brezis and J.-L. Lions, editors, *Collège de France Seminar*,

- volume XI, 1994.
- [Boyère 99] E. Boyère. *Contribution à la modélisation numérique thermo-mécanique tridimensionnelle du forgeage*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Juin 1999.
- [Brézi 83] H. Brézi. *Analyse fonctionnelle, théorie et application*. Masson, Paris, 1983.
- [Brezzi et al. 91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [Carvalho 97] L. M. Carvalho. *Méthodes du complément de Schur préconditionnées dans des environnements à mémoire distribuée*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997.
- [Chabrand et al. 98] P. Chabrand, F. Dubois, and M. Raous. *Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction*. Mathematical and Computer Modelling, 28(6-8):97-108, 1998.
- [Chabrand et al. 95] P. Chabrand, F. Dubois and M. Raous. Programmation mathématique pour le contact avec frottement et comparaison avec d'autres méthodes. In *2^{ième} colloque national en calcul des structures*, volume 2, pages 429-434, GIENS, 16-19 Mai 1995.
- [Champaney 96] L. Champaney. *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1996.
- [Chenot et al. 98] J.-L. Chenot and L. Fourment. Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation, *Computational Mech., E. Oñate and S.R. Idelsohn (Eds)*, Barcelona, Spain, 1998.
- [Christensen et al. 99] W. Christensen and Klarbring. Newton's method for frictional contact problems. In *European Conference on Computational Mechanics*, Muchen, Germany, August-September 1999.
- [Coupez 91] T. Coupez. *Grandes Déformations et remaillages automatiques*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. Novembre 1991.
- [Coupez 95] T. Coupez. *Stable Stabilized finite element for 3D forming calculation*. Communication interne CEMEF, École nationale supérieure des mines de Paris, 1995
- [Digonnet 01] H. Digonnet. *Repartitionnement dynamique, mailleur parallèle et leurs applications à la simulation numérique en mise en forme des matériaux*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2001.
- [Duvaut 82] G. Duvaut. Loi frottement non locale. *JMTA*, pages 73-78, numéro

- spécial*. 1982
- [Duvaut 86] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Edition Masson. Paris, 1986.
- [Duvaut et al. 72] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [Doghri et al. 98] I. Doghri, A. Muller, and R. L. Taylor. A general three-dimensional contact procedure for implicit finite element codes. *Engineering Computations*, 15(2):233-259, 1998.
- [El-Abbasi et al. 01] N. El-Abbasi & K. Bathe. Stability and patch test performance of contact discretisations and a new solution algorithm. *Computer and structures* 79 (2001) 1473-1486.
- [Farhat et al. 91] C. Farhat and F.X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, *Int. J. Engrg* 32, pp. 1205-1227, 1991
- [Feujóo et al. 88] R. A. Feujóo and J. C. Barbosa. Numerical formulations for contact problems with friction. *Journal of theoretical and applied mechanics*. Special issue, supplement n°1 to vol.7, 1988.
- [Fish et al. 95] J. Fish, V. Belsky, and M. Pandheeradi. Iterative and direct solvers for interface problems with lagrange multipliers. *Computing Systems in Engineering*, 6(3):261-273, 1995.
- [Fortin et al. 92] M. Fortin and R. Glowinski. *Méthodes du lagrangien augmenté*. Collection méthodes Mathématique de l'Informatique. Dunod Paris, 1992.
- [Fourment et al. 03] Lionel Fourment, Josué Barboza, Sorin Popa. *Master / slave algorithm for contact between deformable bodies and axial symmetries - Application to 3D metal forging*. The Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid, 17-20 juin 2003
- [Fourment et al. 02] L. Fourment, J. Barboza and al.. *Numerical simulation of 3d multi-bodies metal forming problems: application to forging of multi-materials and to study of press deflection*. ICTP : International Conference on Technology of Plasticity, October 27 – November 1, 2002 Yokoyama, Japan.
- [Fourment et al. 98] L. Fourment, J.-L. Chenot, K. Mocellin. Numerical Formulations And Algorithms For Solving Contact Problems In Metal Forming Simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:1435-1462,1999.
- [Gay 95] C. Gay. *Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid*. Thèse de doctorat en Sciences et Génie de Matériaux, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis,1995.
- [Gratacos 91] P. Gratacos. *Un problème de déformation couplée: analyse élastoplastique par éléments finis du laminage de bande à froid*.

- Thèse de Doctorat en Sciences et Génie de Matériaux, École des Mines de Paris (1991)
- [Haslinger et al. 80] J. Haslinger and I. Hlaváček. *Contact between Elastic Bodies-1. Continuous Problems*, Aplikace Matematiky 25, 324-347, 1980.
- [Haslinger et al. 81] J. Haslinger and I. Hlaváček. *Contact between Elastic Bodies-2. Continuous Problems*, Aplikace Matematiky 26, 263-290, 1981.
- [Hild 98] P. Hild. *Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles*. Thèse de doctorat, Université Paul SABATIER de Toulouse, Laboratoire de Mathématiques pour l'Industrie et la Physique, Janvier 1998.
- [Inria 99] Institut National de Recherche en Informatique et Automatique. *Modélisation mathématique et numérique des problèmes de contact et frottement*, Problèmes non linéaires appliquées, Rocquencourt France, Novembre 1999.
- [Jaouen 98] O. Jaouen. *Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces coulées*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Décembre 1998
- [Jean et al. 88] M. Jean and G. Touzot. Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformation problems. *Journal of theoretical and applied mechanics*, 1988. *Special issue, supplement n°1 to vol.7*.
- [Jourdan et al. 98] F. Jourdan, P. Alart and M. Jean. A gauss-seidel like algorithm to solve frictional contact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 155:31-47, 1998.
- [Leung et al. 98] A. Y. T. Leung, C. Guoqing and C. Wanji. Smoothing newton method for solving two and tree dimensional frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41:1001-1027,1998.
- [Laursen et al. 95] T. A. Laursen and B. N. Maker. An augmented lagrangian quasi-newton solver for constrained nonlineaire finite element applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3571-3590, 1995.
- [Lochegnies et al. 95] D. Lochegnies and J. Oudin. External penalized mixed functional algorithms for unilateral contact and friction in a large strain finite element framework. *Engineering Computations*, 12:307-331, 1995
- [Lebon et al. 92] F. Lebon and M. Raous. Multibody contact problem including friction in structure assembly. *Computer & Structures*, 43(5):925-934, 1992.
- [Marie 97] S. Marie. *Un modèle de parallélisation S.P.M.D. pour la simulation numérique de procédés de mise en forme des matériaux*. Thèse de doctorat, ENSMP, 1997.

- [Miles 95] M. Miles. *Calcul thermomécanique des outillages pour le forgeage à chaud*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Mai 1995.
- [Mocellin 99] K. Mocellin. *Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud: étude du contact et calcul multigrille*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Juillet 1999.
- [Montmitonnet 94] P. Montmitonnet. Simulation des écoulements élastoplastiques par éléments finis. In *Séminaire de plasticité*, CEMEF École des mines de Paris Sophia-Antipolis, France, 1994.
- [Perchat 00] E. Perchat. *Mini-Élément et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au forgeage*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Juillet 2000.
- [Pichelin et al. 00] E. Pichelin, L. Fourment and J.-L. Chenot. A master-slave algorithm for solving contact problem between deformable bodies. 1st submission to Computers & Structures, on January 7, 2000.
- [Pinto 90] Y. Pinto. *Contact et frottement en grandes déformations plastiques. Application au serre-flan en emboutissage*. Thèse de doctorat, Université de Provence (Aix-Marseille I), 1990.
- [Pavanachand et al. 96] Ch. Pavanachand and R. Krishnalumar. A new one-pass approach for large deformation multibody frictional contact analysis. *Numerical Methods in Engineering*, 12:569-579,1996.
- [Rappaz et al. 98] M. Rappaz, M. Bellet, M. Deville. *Modélisation numérique en science et génie des matériaux. Traité des matériaux, tome 10.*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1998.
- [Vautier et al 98] I. Vautier, N. Tardieu and Qaïd Taheri. A master-slave large slip contact algorithm coupled to an active set method: application to the modelling of indentation. *Computational Mechanics New Trends and Applications*, S. Idelsohn, E. Oñate and E. Dvorkin (Eds.). CIMNE, Barcelona, Spain 1998.
- [Vieilledent 99] D. Vieilledent. *Optimisation des outils en forgeage à chaud par simulation éléments finis et méthode inverse. Application à des problèmes industriels*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Septembre1999.
- [Raous et al. 95] M. Raous, M. Jean and J. J. Moreau, editors. *Contact Mechanics*. Plenum Press, New York, 1995.
- [Wagoner et al. 01] R.H. Wagoner and J.-L. Chenot. *Metal forming analysis*. Cambridge University press, Cambridge, 2001.
- [Wriggers et al. 99] P. Wriggers and A. Rieger. Adaptive methods for contact problems, recent developments. In *European Conference and Computational Mechanics*, München, Germany, August 31-

Septembre 3 1999.

- [Wriggers 95] P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2(4):1-49, 1995.
- [Wriggers *et al.* 97] P. Wriggers and G. Zavarise. On contact between three-dimensional beams undergoing large deflections. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13:429-438, 1997.
- [Zavarise *et al.* 97] G. Zavarise and R. L. Taylor. A force control method for contact problems with large penetrations. In *Proceeding of the 5th international conference on computational plasticity*, pages 280-285, BARCELONA, March 1997.